

1 Ein mathematisches Modell und die Änderungsrate

Die Differenzial- und Integralrechnung¹ ist eine Sprache zur Beschreibung des quantitativen Zusammenhangs verschiedener Grössen in einem bestimmten Kontext und liefert uns Werkzeuge zur Erforschung dieser Zusammenhänge. Wir werden zu jedem Problem meist drei verschiedene Betrachtungsweisen parallel nebeneinander entwickeln: eine *numerische*, eine *algebraische* und eine *geometrische*. Im Verlaufe der Untersuchung und Entwicklung verschiedener Modelle werden wir die wichtigsten mathematischen Begriffe und Werkzeuge der Differenzial- und Integralrechnung erarbeiten.

Im ersten Kapitel wird zu einer physikalischen Problemstellung, der Abkühlung eines heissen Getränks, ein einfaches Modell entwickelt. Dabei werfen wir einen ersten Blick auf den zentralen Begriff der *Änderungsrate* einer Grösse, welche in der mathematischen Sprache dann *erste Ableitung* heisst. Ebenfalls taucht hier schon die erste *Ratengleichung* auf, in der Fachsprache wird diese dann als *Differenzialgleichung* bezeichnet.

1.1 Die Abkühlung eines heissen Getränks

Wir betrachten ein Beispiel, das mit einfachen Hilfsmitteln experimentell durchgeführt werden kann. In einem Raum mit der Umgebungstemperatur $T_u = 21.7^\circ\text{C}$ befindet sich eine Tasse heissen Kaffees mit der anfänglichen Temperatur $T_0 \approx 80^\circ\text{C}$. Wie kühlt sich der Kaffee mit der Zeit ab? Die Temperatur T des Kaffees ist eine Funktion der Zeit, wir schreiben dies in der Form $T = T(t)$. Das Funktionsgesetz kennen wir vorläufig noch nicht. Einen ersten Zugang können wir experimentell gewinnen, indem wir den Temperaturverlauf messen und graphisch anzeigen. An einen PC oder einen CAS-Rechner kann mit Hilfe eines Zusatzgerätes eine Temperatursonde angeschlossen werden, so dass der zeitliche Verlauf der Temperatur direkt auf den Rechner übertragen wird und die Daten gespeichert und angezeigt werden. Im vorliegenden Beispiel wurde alle sechs Sekunden eine Temperaturmessung vorgenommen² und man erhielt den in der Abbildung 1.1 dargestellten Temperaturverlauf.

Liest man die Werte alle 60 s ab, dann erhält man die Tabelle 1.1

Tabelle 1.1: Temperatur des Kaffees, alle 60 s gemessen

t in s	0	60	120	180	240	300	360	420	480	540	600
T in °C	79.7	70.4	63.1	57.2	52.2	48.1	44.4	41.1	38.5	36.1	34.0

Beim vorliegenden Experiment erfolgte alle sechs Sekunden eine Messung, so dass eine

¹Anstelle von Differenzial- und Integralrechnung wird v.a. im deutschen Sprachraum oft von *Analysis* gesprochen.

²Die Messungen erfolgten mit Hilfe des CBL2 von Texas Instruments.

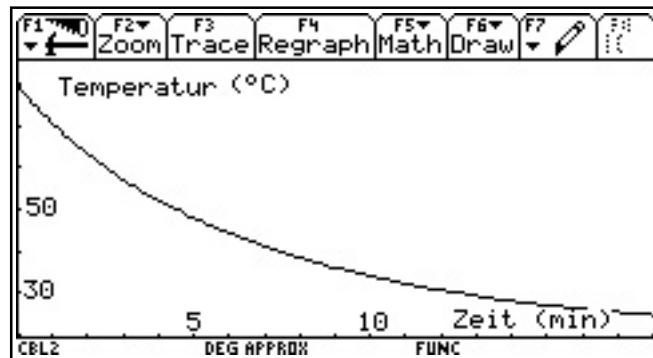


Abbildung 1.1: Abkühlung eines Kaffees

Tabelle mit einer feineren Zeitunterteilung erstellt werden konnte. Beispielsweise erhielt man für die Zeit zwischen 330 s und 390 s die Tabelle 1.2

Tabelle 1.2: Abkühlung des Kaffees zwischen 330 s und 390 s

t in s	330	336	342	348	354	360	366	372	378	384	390
T in °C	46.24	45.85	45.49	45.12	44.76	44.40	44.05	43.71	43.36	43.03	42.70

Um das Gesetz genau zu kennen und damit auch die Gründe für die Gestalt der gewonnenen Kurve zu ermitteln, benötigen wir eine genauere Untersuchung. Dazu stellen wir ein Modell auf, welches wir dann mit der Wirklichkeit vergleichen.

1.2 Die momentane Änderungsrate oder erste Ableitung

Wir führen den Begriff der *momentanen Änderungsrate (erste Ableitung)* ein. Die betrachtete Temperatur ändert sich mit der Zeit; das Tempo, mit der dies geschieht, nennen wir die Änderungsrate der Temperatur. Würde sich die Temperatur z.B. in jeder Minute um 6°C verringern, dann wäre die Änderungsrate, welche wir mit T' bezeichnen, $T' = -6^\circ\text{C}/\text{min} = -0.1^\circ\text{C}/\text{s}$, je nachdem in welcher Einheit wir die Zeit messen. Würde die Abkühlung so stattfinden, dann würde sich unser Kaffee innerhalb von 10 min von 80°C auf 20°C abkühlen und der Verlauf der Temperatur könnte durch die lineare Funktion $T(t) = 80 - 6t$ beschrieben werden. Tatsächlich haben wir aber schon gesehen, dass der Temperaturverlauf nicht linear ist, was es notwendig macht, den Begriff der momentanen Änderungsrate genauer zu erarbeiten. Die Änderungsrate ist nämlich nicht konstant, sondern ändert sich dauernd, so wie sich etwa die Geschwindigkeit eines Fahrzeugs beim Abbremsen auch dauernd ändert. So wie wir jedoch auch bei einem Abbremsvorgang zu jedem Zeitpunkt von einer Momentangeschwindigkeit sprechen können, gibt es auch bei der Abkühlung des Kaffees zu jedem Zeitpunkt eine momentane Änderungsrate der Temperatur. Im betrachteten Beispiel beträgt die Änderungsrate anfänglich etwa $-9.3^\circ\text{C}/\text{min}$, jedoch nach 6 min nur noch etwa $-3.5^\circ\text{C}/\text{min}$ und nach 10 min nur noch etwa $-1.95^\circ\text{C}/\text{min}$ (vgl. Tabelle 1.1). Diese Änderungsraten wurden wie folgt ermittelt: Wenn wir die Änderungsrate zum Zeitpunkt $t = 6 \text{ min} = 360 \text{ s}$ mit Hilfe der Tabelle

1.2. Die momentane Änderungsrate oder erste Ableitung

näherungsweise ermitteln wollen, dann gibt es drei Möglichkeiten:

1. **Vorwärts:** Wir betrachten die Temperatur zur Zeit $t_a = 360$ s und zur Zeit $t_b = 420$ s und bestimmen aus der Temperaturdifferenz und der Zeitdifferenz die Änderungsrate. Wir erhalten

$$T' \approx \frac{41.1^\circ\text{C} - 44.4^\circ\text{C}}{1 \text{ min}} = -3.3^\circ\text{C}/\text{min} = -0.055^\circ\text{C}/\text{s}.$$

2. **Rückwärts:** Wir betrachten die Temperatur zur Zeit $t_a = 300$ s und zur Zeit $t_b = 360$ s und bestimmen wiederum aus den Differenzen die Änderungsrate. Wir erhalten

$$T' \approx \frac{44.4^\circ\text{C} - 48.1^\circ\text{C}}{1 \text{ min}} = -3.7^\circ\text{C}/\text{min} = -0.06^\circ\text{C}/\text{s}.$$

3. **Vorwärts und rückwärts:** Wir betrachten diesmal die Temperatur zur Zeit $t_a = 300$ s und zur Zeit $t_b = 420$ s und berechnen wiederum aus Temperatur- und Zeitdifferenz die Änderungsrate. Wir erhalten

$$T' \approx \frac{41.1^\circ\text{C} - 48.1^\circ\text{C}}{2 \text{ min}} = -3.5^\circ\text{C}/\text{min} = -0.0583^\circ\text{C}/\text{s}.$$

Der dritte Wert liegt zwischen den beiden andern und entspricht am ehesten der momentanen Änderungsrate zur Zeit $t = 360$ s. Genau genommen haben wir jedoch mit allen drei Verfahren nur eine mittlere Änderungsrate in einem bestimmten Zeitintervall berechnet. Mit Hilfe der Tabelle 1.2 können wir die Änderungsrate zur Zeit $t = 360$ s in einem kleineren Zeitintervall genauer berechnen. Wenden wir wieder die drei Möglichkeiten an:

1. **Vorwärts:** Wir betrachten die Temperatur zur Zeit $t_a = 360$ s und zur Zeit $t_b = 366$ s und bestimmen aus der Temperaturdifferenz und der Zeitdifferenz die Änderungsrate. Wir erhalten

$$T' \approx \frac{44.05^\circ\text{C} - 44.4^\circ\text{C}}{6 \text{ s}} = -0.0583^\circ\text{C}/\text{s}.$$

2. **Rückwärts:** Wir betrachten die Temperatur zur Zeit $t_a = 354$ s und zur Zeit $t_b = 360$ s und bestimmen wiederum aus den Differenzen die Änderungsrate. Wir erhalten

$$T' \approx \frac{44.4^\circ\text{C} - 44.76^\circ\text{C}}{6 \text{ s}} = -0.06^\circ\text{C}/\text{s}.$$

3. **Vorwärts und rückwärts:** Wir betrachten diesmal die Temperatur zur Zeit $t_a = 354$ s und zur Zeit $t_b = 366$ s und berechnen wiederum aus Temperatur- und Zeitdifferenz die Änderungsrate. Wir erhalten

$$T' \approx \frac{44.05^\circ\text{C} - 44.76^\circ\text{C}}{12 \text{ s}} = -0.0592^\circ\text{C}/\text{s}.$$

Wir stellen fest, dass die drei Resultate jetzt viel näher beieinander liegen.

Wenn wir die momentane Änderungsrate zu einem bestimmten Zeitpunkt noch genauer bestimmen wollen, dann benötigen wir eine Tabelle mit einer möglichst feinen zeitlichen Abstufung, d.h. Messwerte, die zeitlich möglichst nahe beieinander liegen. Prinzipiell wird die Bestimmung der momentanen Änderungsrate umso genauer, je kleiner wir

das Zeitintervall wählen. Bei Funktionen, die durch einen Term gegeben sind, werden wir ein Verfahren entwickeln, das Zeitintervall beliebig klein werden zu lassen. Bei Funktionen, die aus Messungen gewonnen wurden, sind da jedoch Grenzen gesetzt. Auch wenn die Messungen kontinuierlich erfolgen, sind sie mit einer gewissen Ungenauigkeit behaftet und diese kann bei sehr kleinen Zeitintervallen bei der Berechnung der Änderungsrate stark ins Gewicht fallen.

Präzisierung: die mittlere und die momentane Änderungsrate

Bestimmen wir die Änderungsrate der Temperatur zwischen zwei Zeitpunkten t_a und t_b mit Hilfe der Werte zu diesen Zeitpunkten, also als

$$\frac{T(t_b) - T(t_a)}{t_b - t_a} = \frac{\Delta T}{\Delta t},$$

so ist dies die *mittlere Änderungsrate* im betrachteten Zeitintervall, diese ist, wenn das Zeitintervall genügend klein ist, ein *Näherungswert* für die *momentane Änderungsrate*³ im betreffenden Zeitintervall.

Bemerkung zur Delta-Notation : Um Differenzen resp. Änderungen von Grössen anzuzeigen, verwenden wir den griechischen Buchstaben Δ (Delta).

1.3 Die Differenzialgleichung für den Abkühlvorgang (Newtons Abkühlungsgesetz)

Wir stellen im folgenden ein *Modell* für den Abkühlvorgang auf.⁴ Das Experiment zeigte, dass die Änderungsrate der Temperatur mit zunehmender Abkühlung des Kaffees immer kleiner wurde. I. Newton stellte nun auf Grund von Messungen und von physikalischen Überlegungen das folgende Modell auf:

- Die Energie (Wärme), die während eines kleinen Zeitintervalls Δt vom Kaffee an die Umgebung abgegeben wird, ist proportional zur Differenz $T(t) - T_u$ und zur Grösse des Zeitintervalls Δt . $T(t)$ ist die Temperatur des Kaffees zur Zeit t und T_u die Umgebungstemperatur. Mit andern Worten: die (momentane) Änderungsrate der innern Energie des Kaffees ist proportional zur Temperaturdifferenz $T(t) - T_u$.
- Die (momentane) Änderungsrate der Temperatur ist proportional zur Änderungsrate der innern Energie und damit ebenfalls proportional zur Temperaturdifferenz $T(t) - T_u$.

Daraus ergibt sich die folgende *DIFFERENZIALGLEICHUNG* für die Abkühlung:

$$T'(t) = k \cdot (T(t) - T_u). \tag{1.1}$$

Die Gleichung (1.1) ist eine sog. Differenzialgleichung oder Ratengleichung. Sie gibt uns einen Zusammenhang zwischen der Funktion T und ihrer momentanen Änderungsrate T' , nicht aber die Funktion selbst. Eines der Hauptziele der folgenden Arbeit wird darin

³Die genaue Definition der momentanen Änderungsrate folgt im nächsten Kapitel

⁴Dieses Modell geht auf den Physiker I. Newton (1642-1727) zurück

bestehen, Methoden zu entwickeln, welche es ermöglichen, die Funktion oder die Funktionen zu finden, die eine bestimmte Differenzialgleichung oder ein System von Differenzialgleichungen erfüllen. Das Auffinden dieser Funktionen heisst *Lösen* der Differenzialgleichung(en).

Bemerkung: Die Gleichung (1.1) ist ein *Modell* zur Beschreibung des Temperaturverlaufs. Tatsächlich wird der Temperaturverlauf nicht exakt diesem Gesetz folgen. Der Temperaturverlauf wird von vielen Faktoren beeinflusst: Wärmeleitung, Wärmestrahlung, Verdunstung, Bewegungen innerhalb der Flüssigkeit, Luftbewegungen in der Umgebung etc. Weiterhin spielt es auch eine Rolle, an welcher Stelle die Temperatur gemessen wird und zudem sind Messungen nie ganz exakt. Das vorliegende Modell ist eine Idealisierung und Vereinfachung, welche jedoch dem effektiven Verlauf recht nahe kommt und das Wesentliche zeigt und deshalb zur Beschreibung und Berechnung brauchbar und nützlich ist. Die mathematisch berechneten Resultate widerspiegeln jedoch nicht exakt die physikalisch gemessenen.

1.4 Die Euler-Methode zur numerischen Lösung von Differenzialgleichungen

Das mathematische Modell für das anfänglich gestellte Problem der Abkühlung des Kaffees führt uns auf ein sogenanntes *Anfangswertproblem* :

Gegeben ist eine Differenzialgleichung und ein Anfangswert, gesucht ist diejenige Funktion, die die Differenzialgleichung erfüllt (also eine Lösung ist) und durch den Anfangswert geht.

Beispiel:

Ein Abkühlvorgang verlaufe gemäss der Differenzialgleichung

$$T'(t) = k \cdot (T(t) - T_u); \quad T_u = 20^\circ\text{C}; \quad k = -0.1 \text{ min}^{-1}$$

mit dem Anfangswert $T(0) = T_0 = 80^\circ\text{C}$.

T_u ist die Umgebungstemperatur, k ein Parameter, welcher von Form, Material, Grösse und Inhalt des Gefässes abhängt.

Da es sich um ein physikalisches Problem handelt, haben alle Grössen eine Einheit, so auch der Parameter k . Wenn wir die Einheiten vorher vereinbaren, brauchen sie während der Rechnung nicht speziell berücksichtigt zu werden.

Wir stellen nun die Frage: Wie gross ist die Temperatur nach 6 min, wie gross ist also $T(6)$? Wir werden die Antwort in der Form einer Folge von immer besseren Näherungen konstruieren.

Erste (grobe) Näherung in einem Schritt

Es ist $T'(0) = -0.1 \cdot (80 - 20)^\circ\text{C}/\text{min} = -6^\circ\text{C}/\text{min}$.

Also ergibt sich in der Zeit $\Delta t = 6 \text{ min}$ eine Temperaturänderung von

$$\Delta T = T' \cdot \Delta t = -6 \frac{^\circ\text{C}}{\text{min}} \cdot 6 \text{ min} = -36^\circ\text{C} \text{ und damit erhält man}$$
$$T(6) = 80^\circ\text{C} - 36^\circ\text{C} = 44^\circ\text{C}.$$

KAPITEL 1. EIN MATHEMATISCHES MODELL UND DIE ÄNDERUNGSRATE

Der Verlauf der Temperatur in den ersten sechs Minuten wird hier durch eine *lineare Funktion* beschrieben (Abbildung 1.2).

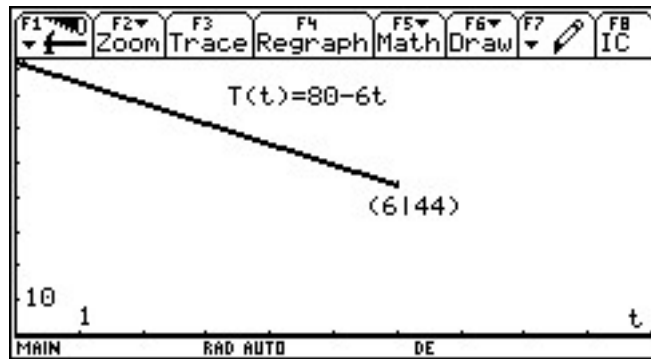


Abbildung 1.2: Euler-Methode, ein Schritt mit $\Delta t = 6$ min

Zweite Näherung in zwei Schritten

Wir verwenden jetzt zwei Zeitschritte der Grösse $\Delta t = 3$ min. Wir berechnen die Temperatur nach 6 min mit der folgenden Tabelle:

Tabelle 1.3: Euler-Methode, zwei Schritte mit $\Delta t = 3$ min

Zeit t min	Temperatur T(t) °C	Änderungsrate T'(t) °C/min	Änderung $\Delta T = T' \cdot \Delta t$ °C
0	80	-6	-18
3	62	-4.2	-12.6
6	49.4		

Der Verlauf der Temperatur in den ersten sechs Minuten wird hier durch eine Funktion beschrieben, die aus zwei Stücken linearer Funktionen besteht, eine sogenannte *stückweise lineare Funktion* (Abbildung 1.3).

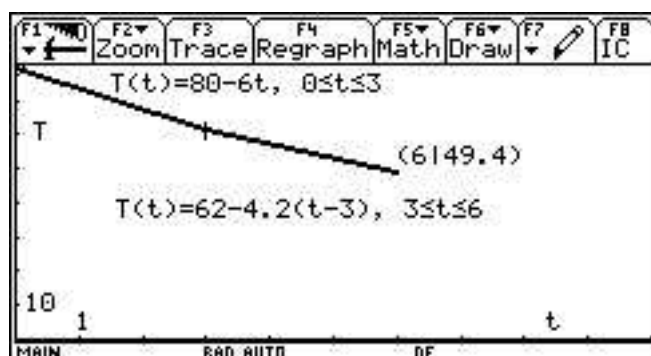


Abbildung 1.3: Euler-Methode, zwei Schritte mit $\Delta t = 3$ min

Dritte Näherung in sechs Schritten

Wir verwenden jetzt sechs Zeitschritte der Grösse $\Delta t = 1$ min und berechnen die Temperatur nach 6 min wieder mit einer Tabelle:

Tabelle 1.4: Euler-Methode, sechs Schritte mit $\Delta t = 1$ min

Zeit t min	Temperatur T(t) °C	Änderungsrate T'(t) °C/min	Änderung $\Delta T = T' \cdot \Delta t$ °C
0	80	-6	-6
1	74	-5.4	-5.4
2			
3			
4			
5			
6	51.886		

Berechnen Sie selbst die weiteren Werte der Tabelle. Zur Kontrolle: Die Temperatur nach 6 min sollte 51.886°C betragen.

Der Graph besteht nun aus sechs Strecken, es handelt sich um eine *stückweise lineare Funktion* mit sechs Teilen (Abbildung 1.4).

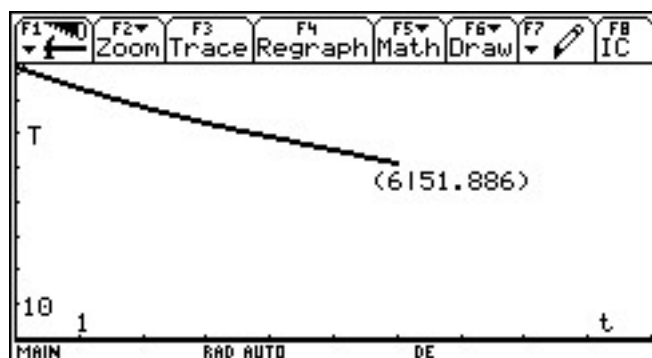


Abbildung 1.4: Euler-Methode, sechs Schritte mit $\Delta t = 1$ min

In der Abbildung 1.5 finden Sie die drei Näherungen (1 Schritt, 2 Schritte und 6 Schritte) in einem Bild dargestellt.

Wir können nun die Anzahl der Schritte sukzessive weiter erhöhen und erhalten damit immer bessere Näherungen. Für eine Näherung mit 60 Schritten, also $\Delta t = 0.1$ min, sind die ersten Zeilen in der Tabelle 1.5 aufgelistet.

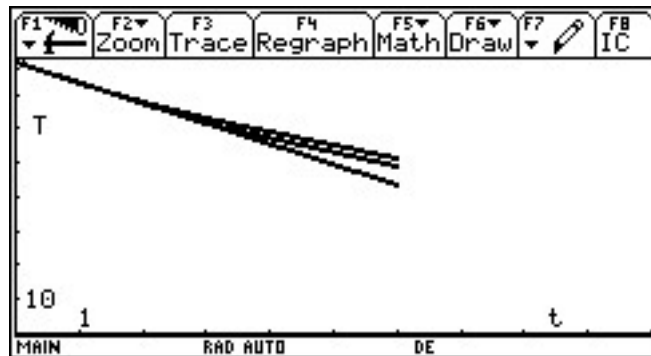


Abbildung 1.5: Euler-Methode mit einem, zwei und sechs Schritten

Tabelle 1.5: Euler-Methode mit $\Delta t = 0.1$ min

Zeit t min	Temperatur T(t) °C	Änderungsrate T'(t) °C/min	Änderung $\Delta T = T' \cdot \Delta t$ °C
0	80	-6	-0.6
0.1	79.4	-5.94	-0.594
0.2	78.806		
⋮	⋮	⋮	⋮

Grundprinzip: Kennen wir in einer Zeile der Tabelle die Temperatur $T(t)$ und die Temperaturänderung ΔT , dann ergibt sich die Temperatur in der nächsten Zeile dadurch, dass wir die Temperaturänderung ΔT zur Temperatur $T(t)$ addieren. Da von einer Zeile zur nächsten die Zeit um Δt zunimmt, bezeichnen wir die auf $T(t)$ folgende Temperatur mit $T(t + \Delta t)$. Es ist also

$$T(t + \Delta t) = T(t) + \Delta T.$$

Für die Temperaturänderung gilt:

Temperaturänderung = Änderungsrate mal Zeitintervall

$$\Delta T = T'(t) \cdot \Delta t.$$

Damit erhalten wir: Die Temperatur in der jeweils nächsten Zeile wird berechnet gemäss

$$T(t + \Delta t) = T(t) + T'(t) \cdot \Delta t.$$

Machen wir Δt immer kleiner, erhöht sich zwar der Rechenaufwand, dafür aber auch die Genauigkeit. Die Berechnung gemäss der hier erklärten Methode heisst *EULER-METHODE*. Mit einem CAS-Rechner lassen sich die Tabellen für frei gewählte Zeitschritte einfach berechnen und die damit näherungsweise berechnete Funktion auch graphisch darstellen (Näheres dazu finden Sie im Anhang). Um die Zunahme der Genauigkeit zu analysieren, betrachten wir die folgende Tabelle 1.4.

$T(6)$ nähert sich bei sukzessiver Verkleinerung von Δt immer mehr einem bestimmten Wert (wir werden diesen später mit andern Methoden genau bestimmen können). Aus der Tabelle 1.4 ist ersichtlich, dass sich immer mehr Stellen von $T(6)$ stabilisieren, d.h. sie

Tabelle 1.6: $T(6)$ für $\Delta t \rightarrow 0$

Δt	Anzahl Schritte	$T(6)$
6	1	44
3	2	49.4
1	6	51.886
0.1	60	52.829
0.01	600	52.919
0.001	6000	52.9277
0.0001	60'000	52.9286
0.00001	600'000	52.9287

verändern sich bei weiterer Verkleinerung von Δt nicht mehr. Den exakten Wert definieren wir als *Grenzwert für Δt gegen 0* und verwenden dafür das Symbol

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} .$$

1.5 Zusammenfassung

- Die Temperatur T einer Flüssigkeit ist eine Funktion, speziell eine Funktion der Zeit t , d.h. es lässt sich jeder Zeit t eindeutig eine Temperatur T zuordnen. Wir schreiben dies in der Form $T = T(t)$. Das Funktionsgesetz ist vorderhand nicht bekannt, für die Funktion (Zuordnung) kann man mit Messungen jedoch eine Wertetabelle ermitteln.
- Die momentane (zeitliche) Änderungsrate oder erste Ableitung der Temperatur (nach der Zeit) ist ein Mass für das Tempo der Temperaturänderung, sie wird in der Einheit $^{\circ}\text{C}/\text{min}$ oder $^{\circ}\text{C}/\text{s}$ gemessen und wird mit T' bezeichnet. Die momentane Änderungsrate hängt hier ebenfalls von der Zeit ab, d.h. sie ist eine Funktion der Zeit. Aus der Wertetabelle kann die momentane Änderungsrate nur näherungsweise bestimmt werden, dazu betrachtet man zwei möglichst nahe beieinander liegende Funktionswerte. Es gilt dann $T'(t) \approx \frac{\Delta T}{\Delta t}$, wobei ΔT die Differenz (Änderung) der Temperaturwerte und Δt die Differenz (Änderung) der Zeiten bedeutet.
- Bei vielen Problemen ist es möglich, eine Beziehung zwischen der momentanen Änderungsrate einer Grösse und dieser Grösse selbst in Form einer Gleichung zu formulieren. Eine solche Gleichung heisst Ratengleichung oder *Differenzialgleichung*. Im Falle der Abkühlung einer heissen Flüssigkeit lautet die Differenzialgleichung $T'(t) = k \cdot (T(t) - T_u)$, wobei T_u die Umgebungstemperatur und k eine (von den physikalischen Umständen her bestimmte) Konstante ist.
- Die Differenzialgleichung $T'(t) = k \cdot (T(t) - T_u)$ ermöglicht es uns, ausgehend von einer gegebenen Anfangstemperatur, Näherungswerte für die Temperatur T zu irgend einem gewünschten Zeitpunkt t zu berechnen, d.h. wir können die gesuchte Funktion $T(t)$ näherungsweise berechnen. Die einfachste Methode dazu ist die *Euler-Methode*.

1.6 Aufgaben zum Kapitel 1

1. Wie gross ist die Änderungsrate der Temperatur nach 2 min im gemessenen Beispiel aus der Theorie §1.1., wenn man Tabelle 1.1 verwendet? Erklären Sie das Vorgehen. Welcher Wert ist der bessere ?
2. Wie gross ist die Änderungsrate der Temperatur nach 378 s in den Einheiten °C/min und °C/s ? (Beispiel in §1.1.)
3. Ein heisses Getränk hat die Anfangstemperatur $T_0 = 95\text{ °C}$, die Umgebungstemperatur beträgt $T_u = 20\text{ °C}$. Die anfängliche momentane Änderungsrate der Temperatur beträgt -5 °C/min . Wie lange muss man warten, bis sich das Getränk auf 55 °C abgekühlt hat? (Euler-Methode verwenden mit $\Delta t = 0.1\text{ min}$ und $\Delta t = 0.01\text{ min}$)
4. Beim freien Fall ohne Luftwiderstand kann der zurückgelegte Weg s als Funktion der Zeit t wie folgt dargestellt werden: $s(t) = \frac{g}{2}t^2$ mit $g = 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, Zeit t in s. Zeichnen Sie die Funktion auf für $0 \leq t \leq 3$. Berechnen Sie sodann die Geschwindigkeit nach 1.5s unter Verwendung eines Zeitintervalls von $\Delta t = 0.1$; 0.01 ; 0.001 ; 0.0001 s . Erstellen Sie eine geeignete Tabelle.
5. Gegeben ist das Anfangswertproblem durch die Differenzialgleichung $y'(t) = 0.5y(t)$ und den Anfangswert $y(0) = 1.2$. Berechnen Sie unter Verwendung der Euler-Methode sukzessive bessere Näherungswerte für $y(3)$. Verwenden Sie nacheinander die folgenden Zeitschritte: $t_{\text{step}} = \Delta t = 3$; 1 ; 0.1 ; 0.01 ; 0.001 . Skizzieren Sie die entstehenden Graphen und geben Sie für die beiden ersten Fälle die Gleichungen der Geradenstücke an. Rechnen Sie für $t_{\text{step}} = 3$ und $t_{\text{step}} = 1$ ohne TR und erstellen Sie eine Tabelle.
6. Gegeben ist das Anfangswertproblem $y'(t) = y(t)$; $y(0) = 1$. Verwenden Sie den Zeitschritt $\Delta t = \frac{1}{n}$. Zeigen Sie: Es ist $y(1) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Keinen TR verwenden !
7. Wenn man bei der Abkühlung nicht die Wärmeleitung, sondern die Wärmestrahlung als Ursache berücksichtigt, dann ergibt sich eine andere Differentialgleichung, nämlich: $T'(t) = a \cdot (T^4(t) - T_u^4)$ (Stefan-Boltzmann-Gesetz), wobei hier für die Temperatur die absolute Temperatur gesetzt werden muss $T_{\text{absolut}} = T_{\text{Celsius}} + 273$. Berechnen Sie mit den Daten aus dem Beispiel in 1.4. die Temperatur nach 6 min. Berechnen Sie dabei zuerst die Konstante a so, dass $T'(0) = -6\text{ °C/min}$ (wie im Beispiel). Rechnen Sie mit der Eulermethode und verwenden Sie $t_{\text{step}} = 0.1$.
8. Es sei nun die Anfangstemperatur $T(0) = 25\text{ °C}$, die Umgebungstemperatur $T_u = 20\text{ °C}$. Berechnen Sie die Temperatur nach 1, 2, 3, ..., 10 min nach Newton und nach Stefan-Boltzmann und vergleichen Sie! Bestimmen Sie den Faktor a (Stefan-Boltzmann) resp. k (Newton) so, dass in beiden Fällen die anfängliche Änderungsrate der Temperatur $T'(0) = -0.5\text{ °C/min}$ beträgt. Verwenden Sie die Eulermethode mit $t_{\text{step}} = 0.1$.
9. Ermitteln Sie aus der Tabelle 1.1 den Näherungswert von k in der Differenzialgleichung $T'(t) = k(T(t) - T_u)$ in jedem Zeitintervall $[0; 60]$, $[60; 120]$, ... und bestimmen Sie sodann den Mittelwert. Als Wert von $T(t)$ wählt man am zweckmässigsten jeweils den Mittelwert der Temperatur im entsprechenden Teilintervall.

10. Analog zu Aufgabe 9, aber unter Verwendung der Tabelle 1.2.
11. Zeichnen Sie mit Hilfe des CAS-Taschenrechners oder eines Computers die Lösungskurve zur Differenzialgleichung $T'(t) = k(T(t) - T_u)$ mit dem Anfangswert $T(0) = T_0 = 79.7^\circ\text{C}$ sowie $T_u = 21.7^\circ\text{C}$. Verwenden Sie den Wert $k = -0.155 \text{ min}^{-1}$ aus der vorangehenden Aufgabe sowie einen Zeitschritt von $\Delta t = 0.1$. Die vorgegebenen Werte entsprechen dem in §1.1 beschriebenen Experiment. Vergleichen Sie mit der Abbildung 1.1.