

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Ein mathematisches Modell und die Änderungsrate | 1 |
| 1.1 | Die Abkühlung eines heissen Getränks | 1 |
| 1.2 | Die momentane Änderungsrate oder erste Ableitung | 2 |
| 1.3 | Die Differenzialgleichung für den Abkühlvorgang (Newtons Abkühlungsgesetz) | 4 |
| 1.4 | Die Euler-Methode zur numerischen Lösung von Differenzialgleichungen | 5 |
| 1.5 | Zusammenfassung | 9 |
| 1.6 | Aufgaben zum Kapitel 1 | 10 |
| 2 | Die Ableitung einer Funktion | 13 |
| 2.1 | Die Momentangeschwindigkeit beim Abbremsen eines Fahrzeugs | 13 |
| 2.2 | Die erste Ableitung einer Funktion an einer bestimmten Stelle | 17 |
| 2.3 | Eine globale Betrachtung: Die erste Ableitung als Funktion | 22 |
| 2.4 | Die zweite Ableitung, höhere Ableitungen | 23 |
| 2.5 | Die geometrische Bedeutung der zweiten Ableitung, Wendepunkte | 24 |
| 2.6 | Aufgaben zum Kapitel 2 | 27 |
| 3 | Ableitungen elementarer Funktionen und Ableitungsregeln | 29 |
| 3.1 | Die 1.Ableitung von $f(x) = x^n$ | 29 |
| 3.2 | Die erste Ableitung von $f(x) = \sqrt{x}$ | 30 |
| 3.3 | Die erste Ableitung von $f(x) = \frac{1}{x}$ | 30 |
| 3.4 | Die Summenregel $(f + g)' = f' + g'$ | 30 |
| 3.5 | Die Produktregel $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ | 31 |
| 3.6 | Die Kettenregel $\frac{d}{dx} f[g(x)] = f'[g(x)] \cdot g'(x) = f'(u) \cdot u'$ mit $u = g(x)$ | 33 |
| | 3.6.1 Verkettung von Funktionen | 33 |
| | 3.6.2 Die Kettenregel | 33 |
| 3.7 | Die Quotientenregel $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ | 35 |
| | 3.7.1 $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$ | 35 |
| | 3.7.2 Die Quotientenregel | 35 |
| 3.8 | Aufgaben zum Kapitel 3 | 36 |
| 4 | Die Exponential- und die Logarithmusfunktion | 39 |
| 4.1 | Die Differenzialgleichung (Ratengleichung) für das exponentielle Wachstum | 39 |
| 4.2 | Die Ableitung der Exponentialfunktion | 40 |
| 4.3 | Die Eulersche Zahl e | 40 |
| | 4.3.1 Bestimmung der Eulerschen Zahl e | 40 |
| | 4.3.2 Lösung der Differenzialgleichung $y' = ky$ | 41 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 4.4 | Die Logarithmusfunktion; der Logarithmus naturalis | 42 |
| 4.4.1 | Die Umkehrfunktion und ihre Ableitung | 42 |
| 4.4.2 | Die Ableitung der Logarithmusfunktion | 42 |
| 4.5 | Die Ableitung der Exponential- und der Logarithmusfunktion bei beliebiger Basis | 42 |
| 4.5.1 | Eine Basis genügt! | 42 |
| 4.5.2 | Die Ableitung von $y = b^x$ und von $y = \log_b(x)$ | 43 |
| 4.6 | Aufgaben zum Kapitel 4 | 44 |
| 5 | Differenzialgleichungen und Modelle | 47 |
| 5.1 | Modelle mit Differenzialgleichungen | 47 |
| 5.2 | Das exponentielle und das logistische Wachstum | 48 |
| 5.2.1 | Das exponentielle Wachstum | 48 |
| 5.2.2 | Das logistische Wachstum | 49 |
| 5.3 | Ein Wachstumsmodell für zwei interagierende Tierarten: Räuber und Beute . | 50 |
| 5.4 | Die Euler-Methode | 51 |
| 5.5 | Ein Modell aus der Epidemiologie | 53 |
| 5.5.1 | Die Ausbreitung einer ansteckenden Krankheit | 53 |
| 5.5.2 | Das S-I-R-Modell | 54 |
| 5.6 | Ein Beispiel aus der Physik: Der freie Fall | 55 |
| 5.6.1 | Freier Fall ohne Luftwiderstand | 56 |
| 5.6.2 | Freier Fall mit Luftwiderstand | 56 |
| 5.7 | Aufgaben zum Kapitel 5 | 58 |
| 6 | Das Integral | 61 |
| 6.1 | Die Riemann-Summe | 61 |
| 6.1.1 | Elektrische Energie | 61 |
| 6.1.2 | Systematisierung des Vorgehens: die <i>Riemann-Summe</i> | 64 |
| 6.1.3 | Riemann-Obersumme und Riemann-Untersumme | 66 |
| 6.2 | Das Integral | 68 |
| 6.2.1 | Das bestimmte Integral | 68 |
| 6.2.2 | Geometrische Interpretation des bestimmten Integrals | 68 |
| 6.3 | Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung | 69 |
| 6.3.1 | Stammfunktion und unbestimmtes Integral | 70 |
| 6.3.2 | Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung | 71 |
| 6.4 | Anwendungen des bestimmten Integrals | 73 |
| 6.4.1 | Fläche zwischen zwei Graphen | 73 |
| 6.4.2 | Mittelwert einer Funktion | 74 |
| 6.4.3 | Volumen eines Rotationskörpers | 75 |
| 6.5 | Aufgaben zu Kapitel 6 | 77 |
| 7 | Dynamische Systeme | 83 |
| 7.1 | Einführung | 83 |
| 7.2 | Phasenraum und Trajektorien | 83 |
| 7.3 | Das Richtungsfeld und das Vektorfeld | 85 |
| 7.4 | Gleichgewichtspunkte | 88 |
| 7.5 | Analyse des Phasenraums | 89 |
| 7.5.1 | Konkurrierende Spezies, Wettbewerb | 89 |

| | |
|---|------------|
| 7.5.2 Gleichgewichtspunkte und Nullklinen | 90 |
| 7.5.3 Aufteilung in Sektoren | 91 |
| 7.6 Aufgaben zum Kapitel 7 | 93 |
| 8 Die Ableitung der trigonometrischen Funktionen, die harmonische Schwingung | 95 |
| 8.1 Die harmonische Schwingung und die Ableitung der Sinus-Funktion | 95 |
| 8.2 Die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen | 97 |
| 8.2.1 Die Ableitung von $f(x) = \cos(x)$ | 97 |
| 8.2.2 Die Ableitung von $f(x) = \tan(x)$ | 97 |
| 8.2.3 Die Differenzialgleichung der harmonischen Schwingung | 98 |
| 8.3 Aufgaben zum Kapitel 8 | 100 |
| 9 Approximationen | 101 |
| 9.1 Taylor-Polynome | 101 |
| 9.1.1 Lineare Approximation | 101 |
| 9.1.2 Quadratische Approximation | 102 |
| 9.1.3 Approximation mit einem Polynom höheren Grades | 103 |
| 9.1.4 Taylor-Polynome bei $x = a, a \neq 0$ | 105 |
| 9.1.5 Konstruktion neuer Taylor-Polynome aus bekannten | 106 |
| 9.2 Taylor-Reihen | 106 |
| 9.2.1 Potenzreihen und Differenzialgleichungen | 107 |
| 9.3 Aufgaben | 111 |
| 10 Separation der Variablen und die Lösung der linearen Differenzialgleichung erster Ordnung | 113 |
| 10.1 Separation der Variablen | 113 |
| 10.2 Lösung der linearen Differenzialgleichung erster Ordnung | 116 |
| 10.2.1 Lösung der homogenen linearen Differenzialgleichung erster Ordnung | 117 |
| 10.2.2 Die Lösung der linearen Differenzialgleichung erster Ordnung | 118 |
| 10.3 Aufgaben zum Kapitel 10 | 120 |
| A Lösungen | 123 |
| B Eine Übersicht über die wichtigsten Funktionen | 143 |
| C Einfache affine Transformationen einer Funktion (Funktionsverwandtschaften) | 153 |
| D Differenzialgleichungen mit dem TI-89/200 | 163 |