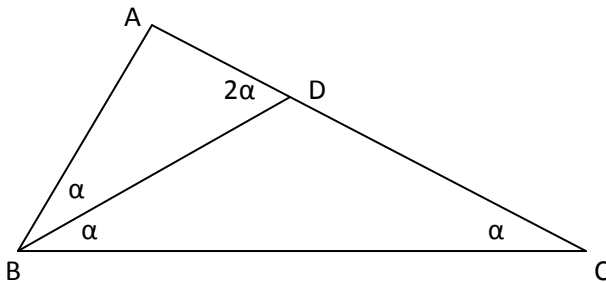


Une solution du problème n° 18 du 24^{ème} championnat de la FFJM: "Le jardin de Trinité"



Le "jardin de Trinité" a la forme du triangle ABC. Posons $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$. On a $a < b + c$.

L'angle en A étant obtus, on a aussi $\alpha < 30^\circ$ soit $\cos \alpha > \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou encore $\frac{a}{2 \cdot CD} > \frac{\sqrt{3}}{2}$

Le triangle ABD est semblable au triangle ABC et $BD = CD$. On a donc $\frac{b-CD}{c} = \frac{CD}{a} = \frac{c}{b} = \frac{b}{a+c}$

Donc $(a+c)c = b^2$, ce qui peut s'écrire $(2c+a)^2 = a^2 + (2b)^2$

Les solutions en nombres entiers de cette équation sont de la forme $2c+a = x^2 + y^2$, $a = x^2 - y^2$, $b = xy$

Ou plus simplement $c = y^2$, $a = x^2 - y^2$, $b = xy$.

L'inégalité $a < b + c$ devient dès lors $x^2 - y^2 < xy + y^2$ soit $(x+y)(x-2y) < 0$ soit $x < 2y$

Et, comme $\frac{a}{2 \cdot CD} = \frac{b}{2c} = \frac{x}{2y}$, l'inégalité $\frac{a}{2 \cdot CD} > \frac{\sqrt{3}}{2}$ devient $y\sqrt{3} < x$

x est donc un entier compris entre $y\sqrt{3}$ et $2y$.

x et y étant 2 entiers différents, la plus petite valeur possible de y est 4 et x vaut alors 7.

On a donc $a = 33$, $b = 28$ et $c = 16$ et le périmètre du triangle vaut donc 77 mètres.