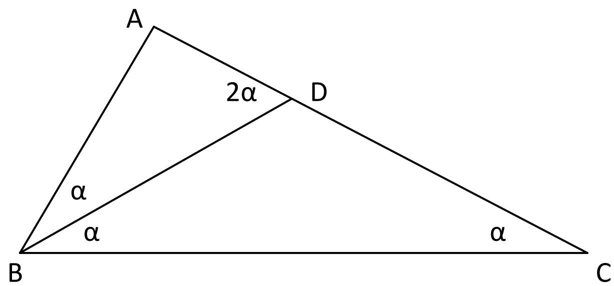
Une solution du problème n° 18 du 24$^{\text{ème}}$ championnat de la FFJM: "Le jardin de Trinité"



Le "jardin de Trinité" a la forme du triangle ABC. Posons BC = a, AC = b et AB = c. On a $a < b + c$.

L'angle en A étant obtus, on a aussi $\alpha < 30°$ *soit* $\cos\alpha > \frac{\sqrt{3}}{2}$ *ou encore* $\frac{a}{2\,CD} > \frac{\sqrt{3}}{2}$

Le triangle ABD est semblable au triangle ABC et BD = CD. On a donc $\frac{b-CD}{c} = \frac{CD}{a} = \frac{c}{b} = \frac{b}{a+c}$

Donc $(a + c)c = b^2$ *, ce qui peut s'écrire* $(2c + a)^2 = a^2 + (2b)^2$

Les solutions en nombres entiers de cette équation sont de la forme $2c + a = x^2 + y^2$, $a = x^2 - y^2$, $b = xy$

Ou plus simplement $c = y^2$, $a = x^2 - y^2$, $b = xy$.

L'inégalité $a < b + c$ *devient dès lors* $x^2 - y^2 < xy + y^2$ *soit* $(x + y)(x - 2y) < 0$ *soit* $x < 2y$

Et, comme $\frac{a}{2\,CD} = \frac{b}{2c} = \frac{x}{2y}$ *, l'inégalité* $\frac{a}{2\,CD} > \frac{\sqrt{3}}{2}$ *devient* $y\sqrt{3} < x$

x est donc un entier compris entre $y\sqrt{3}$ *et* $2y$.

x et y étant 2 entiers différents, la plus petite valeur possible de y est 4 et x vaut alors 7.

On a donc $a = 33$, $b = 28$ *et* $c = 16$ *et le périmètre du triangle vaut donc 77 mètres.*