Quarts de finale du CJML 2013

Problème 1

Deux (descendre les deux morceaux de droite d'un cran vers le bas).

Problème 2

Trois (sortir les noires en trois fois).

Problème 3

Notons a, b et c les nombres de livres lus par chacun.

A affirme que $a \geq 4$.
B affirme que $a < 4$.
C affirme que $a \geq 2$.

On sait que $a \geq 1$.

Dressons un tableau de vérité :

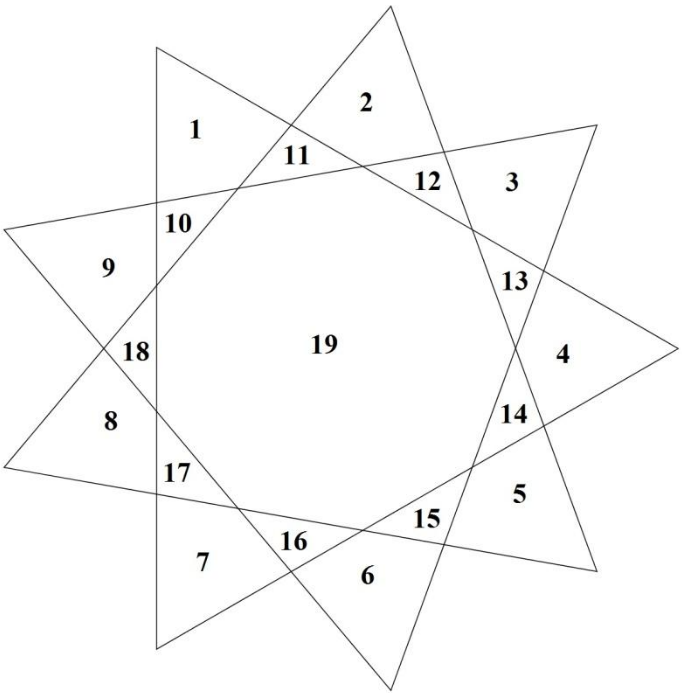
	Cas 1	Cas 2	Cas 3
A	V	F	F
B	F	V	F
C	F	F	V
Conséquences	$a \geq 4$ et $a \geq 4$ et $a < 2$	$a < 4$ et $a < 4$ et $a < 2$	$a \geq 4$ et $a < 4$ et $a < 2$

Seul le cas 2 est possible. $a < 2$ et $a \geq 1$, donc $a = 1$.

Abel a lu **1 livre**.

Problème 4

On trouve semble-t-il au maximum **19 régions** fermées (voir dessin).



Problème 5

Il faut enlever au minimum **quatre dominos** (on est bloqué lorsqu'il reste 0 – 0, 1 – 1, 2 – 2, 3 – 3, 1 – 3 et 2 – 0 par exemple). Mais comment le prouver à moins de faire une liste complète ?

Problème 6

Total de poils = $4 \times 12 \times 10 = 480$.

Chaque jour la brosse perd 9 poils.

Soit le dernier jour au soir duquel il reste suffisamment de poils.

$480 - 9n \geq 250$, soit $n \leq 25{,}555555.....$

Au soir du 25ème jour, il reste assez de poils (255). Le lendemain il n'y en a plus assez pour finir la journée.

Mathilde doit renouveler sa brosse après **25 jours** d'utilisation.

Problème 7

Du 1er mars au 31 mai inclus il y a 92 jours.

Les vaches produisent à elles deux 18 litres de lait par jour, soit $18 \times 1{,}03 \times 92 = 1705{,}68$ kg pendant la période considérée.

Cela représente $\frac{1}{6} \times \frac{1}{4} \times 1705{,}68 = 71{,}07\ kg = 71070\ g$.

On obtient en tout **71070 grammes** de beurre.

Problème 8

Soient l et L la largeur et la longueur du rectangle (entiers non nuls). $l \neq L$ et $L > l$.

$l \times L = 2l + 2L$.

On en déduit l'expression de L en fonction de l : $L = \frac{2l}{l-2} = \frac{2(l-2)+4}{l-2} = 2 + \frac{4}{l-2}$.

Dans la somme, la fraction n'est entière que lorsque $l = 3$, 4 ou 6.

Si $l = 3$, $L = 6$.
Si $l = 4$, $L = 4$ (ne convient pas, car $L \neq l$).
Si $l = 6$, $L = 3$ (non, car L doit être plus grand.

Donc **L = 6**.

Problème 9

Soient a et b deux entiers non nuls tels que $b = 2a$.

$$\frac{a \times b}{a + b} = 12$$

$$\frac{2a^2}{3a} = 12$$

a = 18, donc **b = 36**. **1 solution**.

Problème 10

En sept heures :

La grande aiguille parcourt 7 tours complets d'un disque de rayon 75.
La petite aiguille parcourt $\frac{7}{12}$ d'un tour d'un disque de rayon 60.

La longueur totale parcourue par les extrémités des deux aiguilles est :

$2\pi \times 75 \times 7 + 2\pi \times 60 \times \frac{7}{12} = (1050 + 70)\pi = 1120\pi \approx 1120 \times \frac{22}{7} \approx 3520$ mm $\approx$ **352 cm**. **1 solution**.

Problème 11

df = kv², avec df la distance de freinage, k le coefficient de proportionnalité et v la vitesse constante.

Notons df' la distance de freinage lorsque la vitesse est doublée (croît de 100 %).

df' = $k \times (2v)^2$

df' = $4kv^2$

df' = 4df

df' = $(1 + \frac{300}{100}) \times$ df.

La distance de freinage croît de **300 %** lorsque la vitesse est doublée. **1 solution**.

Problème 12

Plusieurs configurations permettent d'accéder au nombre minimum qui est **436** :

1	**6**	**9**	54
8	**5**	**2**	80
7	**3**	**4**	84
56	90	72	**436**

On s'en convainc grâce au programme suivant rédigé en Maple :

```
> restart:
> total:= 1000:liste:=NULL:
> for a from 1 to 9 do:
> for b from 1 to 9 do:if b<>a then:
> for c from 1 to 9 do:if c<>a and c<>b then:
> for d from 1 to 9 do:if d<>a and d<>b and d<>c then:
> for e from 1 to 9 do:if e<>a and e<>b and e<>c and e<>d then:
> for f from 1 to 9 do:if f<>a and f<>b and f<>c and f<>d and f<>e
then:
> for g from 1 to 9 do:if g<>a and g<>b and g<>c and g<>d and g<>e and
g<>f then:
> for h from 1 to 9 do:if h<>a and h<>b and h<>c and h<>d and h<>e and
h<>f and h<>g then:
> for i from 1 to 9 do:if i<>a and i<>b and i<>c and i<>d and i<>e and
i<>f and i<>g and i<>h then:
> if a*b*c+d*e*f+g*h*i+a*d*g+b*e*h+c*f*i<=total then
total:=a*b*c+d*e*f+g*h*i+a*d*g+b*e*h+c*f*i:
liste:=[a,b,c,d,e,f,g,h,i,total]:
> fi:
> fi:od:fi:od:fi:od:fi:od:fi:od:fi:od:fi:od:fi:od:od:liste;    #Autres
sol. ne seront pas affichées ; on ne veut que le min.#
```

$$[9, 6, 1, 4, 3, 7, 2, 5, 8, 436]$$

Problème 13

Les carrés atteignables sont 4, 9, 16, 25, 36 et 49.

Après avoir longuement testé tous les cas de proche en proche, on trouve **trois solutions** :

		20	**5**	**11**	**25**			**10**	**15**	**21**	**4**					
		16			**24**			**6**			**12**					
18	**7**	**9**			**1**	**8**	**17**	**19**			**13**	**3**	**22**	**14**	**2**	**23**

		20	**5**	**11**	**25**			**10**	**15**	**21**	**4**					
		16			**24**			**6**			**12**					
18	**7**	**9**			**1**	**8**	**17**	**19**			**13**	**23**	**2**	**14**	**22**	**3**

		20	**5**	**11**	**25**			**3**	**22**	**14**	**2**					
		16			**24**			**6**			**23**					
18	**7**	**9**			**1**	**8**	**17**	**19**			**13**	**12**	**4**	**21**	**15**	**10**

Problème 14

Notons a la longueur du côté du triangle équilatéral de départ. La hauteur du triangle équilatéral est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$ a, donc son aire est égale à $\frac{a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a}{2} = 600$. On ne déduit a² = $\frac{2400\sqrt{3}}{3}$.

Aire rouge = Aire de OPR – Aire de PNT.

Aire de OPR = Aire de PRS – Aire de ORS = $\frac{1}{2}\times\frac{a}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{1}{2}\times\frac{a}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{16}$.

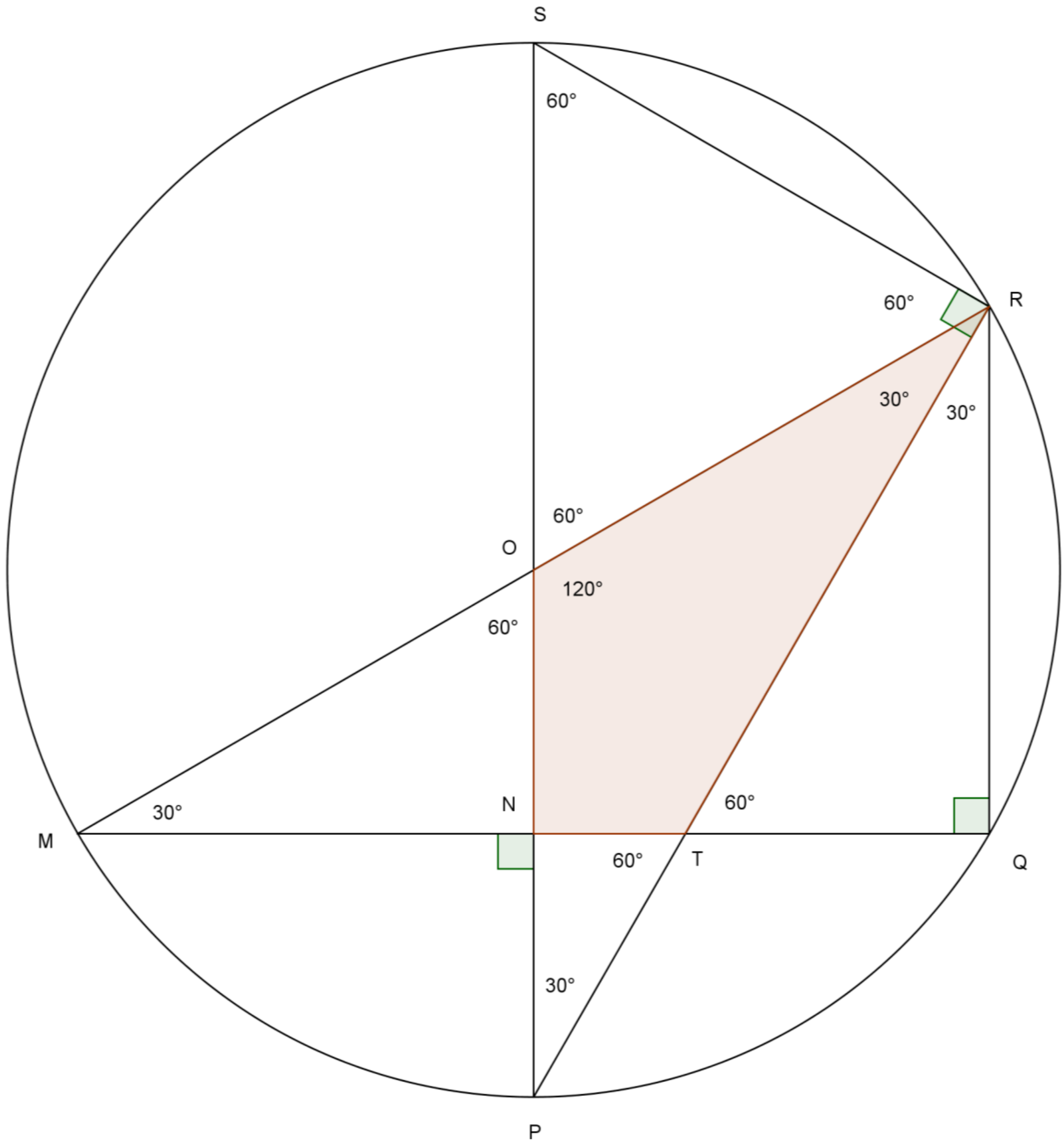
Aire de PNT :

Pythagore dans MNO, du fait que O est facilement le centre du cercle circonscrit à PRS et RQM et donc que MN = $\frac{\sqrt{3}}{4}a$ et MO = $\frac{1}{2}a$, donne NO = $\frac{a}{4}$.

D'où NP = OP – NO = $\frac{1}{2}a - \frac{1}{4}a = \frac{1}{4}a$.

On en déduit Aire de PNT = $\frac{1}{2}\times\frac{a}{4}\times\frac{a}{4}\times\tan(30°) = \frac{\sqrt{3}a^2}{6\times16}$.

D'où Aire rouge = $\frac{\sqrt{3}a^2}{16} - \frac{\sqrt{3}a^2}{6\times16} = \frac{5\sqrt{3}a^2}{96} = \frac{5\times2400}{96} =$ **125 cm²**. **1 solution**.



Problème 15

Il faut que la sphère touche toutes les faces du cube, que les huit sommets du petit cube touchent la sphère et que les deux cubes aient le même centre.

Notons a la longueur du côté du grand cube et b la longueur du côté du petit cube.

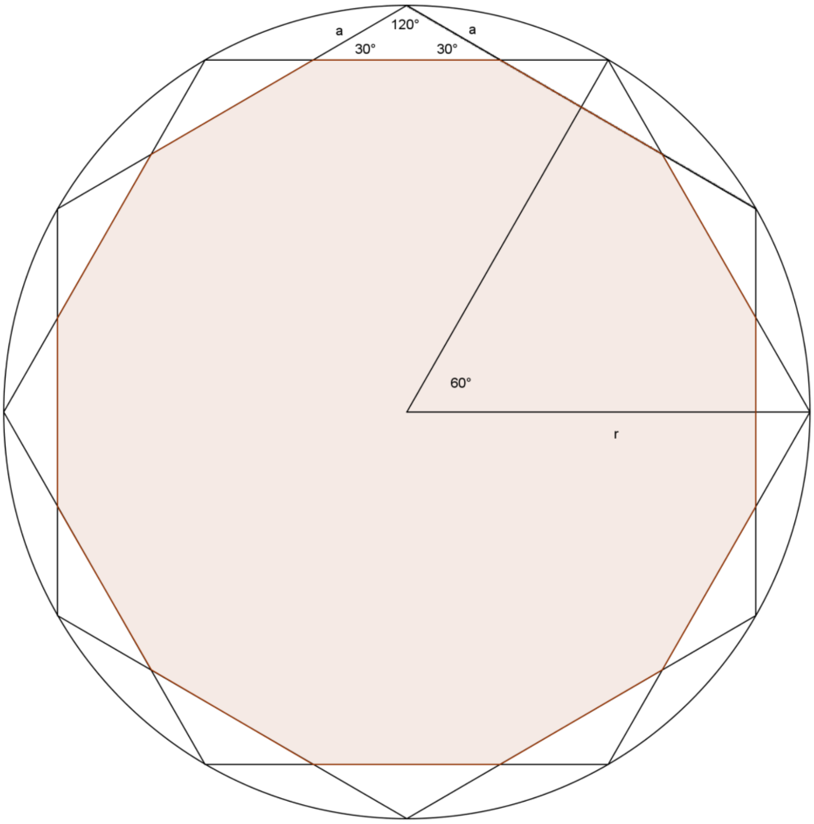
$a^3 = 504$.
Le diamètre de la sphère est égal à a.
La grande diagonale du petit cube est égale à $\sqrt{3}$ b et à a.

Donc b = $\frac{\sqrt{3}a}{3}$.

Donc $b^3 = \frac{\sqrt{3}a^3}{9} = \frac{\sqrt{3}\times 504}{9} = 56\sqrt{3} \approx 56 \times 1{,}732 \approx 97\ cm^3$.

Au maximum, le volume du cube est égal à **97 cm^3**.

Problème 16



Notons r le rayon du cercle dans lequel est inscrit le dodécagone et a la longueur des côtés égaux des triangles isocèles jaunes.

Aire d'un hexagone = 56 = 6 × Aire d'un triangle équilatéral de côté r = 6 × $\frac{\sqrt{3}}{4}r^2$.

D'où $r^2 = \frac{112\sqrt{3}}{9}$.

Chaque petit triangle isocèle de côté a et d'angles à la base de 30° a pour base $\sqrt{3}a$ et pour hauteur $\frac{1}{2}a$ (s'obtient avec cos et sin).

D'où r = 2a + $\sqrt{3}a$, i. e. $a^2 = \frac{r^2}{(2+\sqrt{3})^2} = \frac{112\sqrt{3}}{9(2+\sqrt{3})^2}$.

Aire du dodécagone

= Aire d'un hexagone – 6 × Aire d'un petit triangle isocèle de côté a

= 56 – 6 × $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}a \times \sqrt{3}a$

= 56 – $\frac{56}{(2+\sqrt{3})^2}$

$= 56 \times (4\sqrt{3} - 6)$ (après passage des racines au numérateur)

$\approx 56 \times (4 \times 1{,}732 - 6)$

≈ 52 cm².

L'aire du dodécagone est d'environ **52 cm²**. **1 solution**.

Problèmes 17 et 18

???