Quarts de finale

2012

1 Le verre vide

2 verres, l'un plein et l'autre vide, pèsent autant que 2 verres à moitié rempli. Ainsi un verre vide pèse $2 \times 120 - 200 = 40$ g.

2 En toutes lettres

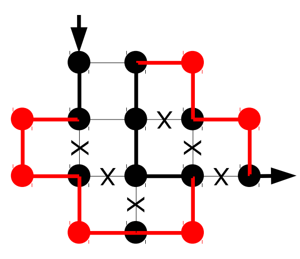
Le nombre 30 convient puisqu'il s'écrit avec six lettres : trente, comprenant quatre lettres différentes e, n, r et t.

3 Quatre cases

Le total des quatre nombres vaut $20 + 12 = ? + 13$, d'où $? = 19$.

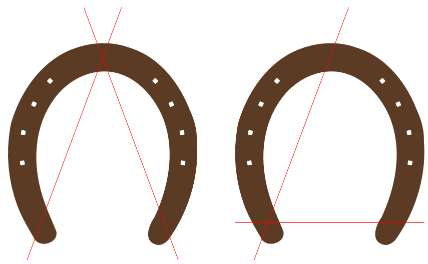
4 Labyrinthe

Le passage par les sommets de degré 2 (en rouge) impose une partie du tracé (segments en rouge). Nous éliminons ensuite les segments issus des sommets noirs déjà traversés par deux segments. Le chemin se complète alors aisément.



5 Le fer à cheval

On peut obtenir au maximum 6 morceaux, comme l'illustrent les deux exemples.



C'est le maximum car c'est une configuration où les 2 droites rencontrent chacune 4 points du fer à cheval et se coupent en son sein.

6 Devine-âge

Si a désigne l'âge, nous avons $6a - 6 = 7\,(a - 7)$, d'où $a = 43$.

7 La suite de Mathilde

n	u_n
1	1
2	11
3	21
4	1211
5	111221
6	312211
7	13112221
8	1113213211
9	31131211131221
10	13211311123113112211
11	11131221133112132113212221
12	3113112221232112111312211312113211
13	1321132132111213122112311311222113111221131221

Le nombre u_n s'obtient en appliquant un codage des répétitions d'un même chiffre (RLE ou run-length encoding) au nombre u_{n-1}.
Tant que la taille d'un bloc ne dépasse pas 9, le nombre de chiffres de u_n vaut 2 fois le nombre de blocs de u_{n-1}.
Ainsi dans u_{12} il y a 23 blocs (3, 1, 3, 1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 3, 2, 1) formant les chiffres de rang pair de u_{13} qui s'écrit donc avec 46 chiffres.
Webographie : voir les suites A005150 et A005341.

8 Les cinq mercredis

Le mois de février 2012 comporte cinq mercredis lorsqu'il commence par un mercredi et que l'année est bissextile. Puisque $7 \times 52 = 364$, il y a un décalage de $2+1+1+1=5$ jours sur un cycle de 4 ans. Par exemple, le 1/2/2016 sera un lundi. Puisque 5 est premier avec 7, il faudra donc attendre 7 cycles soit $4\times 7=28$ ans pour que cela se produise à nouveau. L'année suivante où le mois de février comptera cinq mercredis sera donc $2012+28=2040$.

9 Onzaines à gogo

Si $\overline{mcdu}$ désigne le nombre de Mathilde, nous avons $m+c+d+u=11$ et $m+d\equiv c+u \pmod{11}$. D'où $m+d\equiv c+u\equiv 0 \pmod{11}$ et comme $m\neq 0$ (vrai nombre de quatre chiffres), alors $m+d=11$ et $c=u=0$.
Il y a donc 8 solutions : 2090, 3080, 4070, 5060, 6050, 7040, 8030 ou 9020.

10 A treize heures

L'angle entre la grande aiguille (sur le 0) et la petite aiguille (sur le 1) vaut $\frac{360}{12}=30°$. L'hypothénuse, côté opposé à l'angle droit, ne peut donc être que la grande aiguille. La distance entre les extrémités des deux aiguilles vaut $20,12\sin 30=10,06$ cm.

11 Les carrés de Mathias

Il y a 4 solutions avec $12^2=144$, $21^2=441$, $13^2=169$ et $31^2=961$.
Raisonnons sur les nombres $\overline{du}$ avec $d<u$. Nous écartons les valeurs de 14 à 19, ainsi que de 23 à 29, car $\overline{du}^2<1000<\overline{ud}^2$. Il reste alors à vérifier 21 cas (nous limitons les calculs en constatant l'absence du chiffre final, ou exceptionnellement initial, du carré du renversé) :

- n^2 ne contient pas 5

n	53	54	56	57	58	59
n^2	2809	2916	3136	3249	3364	3481

- n^2 ne contient pas 9

n	34	38	39	74	76	78	79
n^2	1156	1444	1521	5476	5776	6084	6241

- n^2 ne contient pas 1

n	63	73	94	98
n^2	3969	5329	8836	9604

- n^2 ne contient pas 4

n	46	84	86	96
n^2	2116	7056	7396	9216

12 Le collège de l'année

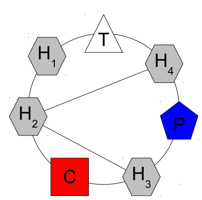
$2012-(16+12+8+5)=1971$ élèves n'ont aucun frère ni soeur scolarisé(e) dans le même établissement : cela fait donc 1971 familles ayant 1 enfant au collège. Il y a aussi $\frac{16}{2}=8$ familles ayant 2 enfants, $\frac{12}{3}=4$ familles ayant 3 enfants, $\frac{8}{4}=2$ familles ayant 4 enfants et $\frac{5}{5}=1$ famille ayant 5 enfants au collège.
Finalement, il y a $1971+8+4+2+1=1986$ familles ayant au moins un enfant au collège.

13 Carrément givré !

Si $n=1111111111=\frac{10^{10}-1}{9}$, alors le nombre gigantesque vaut $g=10^{10}n+5n=\left(\frac{10^{10}+2}{3}\right)^2-1$.
Or, $0<\sqrt{g+1}-\sqrt{g}=\frac{1}{\sqrt{g+1}+\sqrt{g}}<\frac{1}{2\sqrt{g}}$, ainsi l'entier le plus proche de $\sqrt{g}$ est $\sqrt{g+1}=\frac{10^{10}+2}{3}=3n+1=3333333334$.

14 Polygones autoréférents

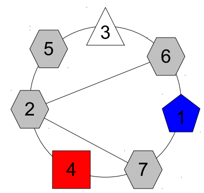
Nommons le contenu de chaque figure. Les congruences seront modulo 10.



Ecrivons d'abord les relations sur les hexagones :

- $H_1 \equiv T+H_2$
- $H_2 \equiv C+H_1+H_3+H_4$
- $H_3 \equiv C+P+H_2$
- $H_4 \equiv T+P+H_2$

Leur somme vaut $T+C+P+H_2 \equiv 0$ et nous en déduisons que $T+H_3 \equiv C+H_4 \equiv 0$, d'où $T+H_3=C+H_4=10=3+7=4+6$.
De $C \equiv H_2 \times H_3$, nous en déduisons que si H_3 est pair, alors C est pair. Cela écarte les cas $H_3=4$ ou 6, pairs, et $C=3$ ou 7, impairs. Le cas $T=7$ est entraînerait une répétition de 7, la seule possibilité étant $H_1 \times H_4=1\times 7$. Reste le cas $T=3$, $H_3=7$, la seule possibilité est $H_1\times H_4=30=5\times 6$, d'où $H_4=6$, $C=4$, $H_1=5$, $H_2=2$ et $P=1$. Nous vérifions alors que cette solution est compatible avec toutes les contraintes.



15 Mini-péri

Parmi tous les triangles de base BC et d'aire a fixés, le triangle ABC isocèle en A est celui de plus petit périmètre.
La relation $a = \frac{1}{2} \times BC \times h$ entraîne que h, la hauteur relative à la base BC, est également fixée. A se trouve donc sur une droite (D) parallèle à (BC) et distante de h. Si C' est le symétrique de C par rapport à (D), alors tout point M de (D) vérifie $MC = MC'$ et $BC' \leqslant MB + MC'$. Ainsi $MB + MC$ est minimal lorsque $M = A$ intersection de (BC') et (D). Passant par le milieu de CC' et étant parallèle à (BC), (D) est la “droite des milieux” et A est donc le milieu de BC'. D'où $AB = AC' = AC$.
Le théorème de la médiane dans le triangle ABC fournit la relation $AB^2+AC^2 = 2h^2 + \frac{BC^2}{2}$, d'où $AB = AC = \sqrt{h^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2}$. Le périmètre du triangle ABC vaut alors $p = BC + 2\sqrt{h^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2}$.
Application numérique avec $a = 254526048$ et $BC = 2012$: $h = 253008$ et $p = 508032$ (anagramme de h).
Variante (peu de calculs) : aucune valeur approchée n'étant donnée dans l'énoncé, le radical $\sqrt{h^2 + \frac{BC^2}{4}}$ doit se simplifier. Le chiffre des unités $8^2 + 6^2 \equiv 0 \pmod{10}$ laisse entendre que AB est un multiple de 10. Le triangle ABC étant allongé ($h \gg BC$), AB, très légèrement supérieur à h, vaut probablement 253010.
Plus précisément, on remarque que $h = 503^2 - 1$ et $\frac{BC}{2} = 2 \times 503$. A l'aide de l'identité $\left(x^2 - y^2\right)^2 + (2xy)^2 = \left(x^2 + y^2\right)^2$ caractérisant les triplets pythagoriciens primitifs, nous déduisons $AB = 503^2 + 1 = 253010$.
Finalement $p = BC + 2AB = 508032$ mm.

16 Multiplication première

Nommons chaque étoile par une lettre.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & a & b & c \\
\times & & & d & e \\
\hline
 & f & g & h & i \\
j & k & l & m & \\
\hline
n & o & p & q & i
\end{array}
$$

Listons les opérations stables :

$3 \times 5 \equiv 5 \times 5 \equiv 5 \times 7 \equiv 5 \pmod{10}$, d'où c ou e vaut 5 et $i = m = 5$.
$2 + 3 \equiv 5$, $2 + 5 \equiv 7$ et $5 + 7 \equiv 2 \pmod{10}$, d'où $h \equiv q \equiv 2 \pmod 5$.
Dans ce qui suit, nous utiliserons des arguments du type : si $e \times c = 10r + i$, alors $e \times b + r \equiv h \pmod{10}$ et en particulier $e \times b + r \equiv 2 \pmod 5$.

- $c = 5$
  - $e = 3$, d'où $3b + 1 \equiv 2$ ou encore $b \equiv 2 \pmod 5$
    - $b = 2$, d'où $a = 5$, mais alors $f = 1$, pas de solution
    - $b = 7$, d'où $a = 7$, $f = 2$, $g = 3$, $l = 2$
      - $d = 3$, d'où la solution

$$\begin{array}{ccccc} & & 7 & 7 & 5 \\ \times & & & 3 & 3 \\ \hline & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 5 & \\ \hline 2 & 5 & 5 & 7 & 5 \end{array}$$

      - $d = 7$, d'où $k = 4$, pas de solution
  - $e = 5$
    - $b = 2$ ou 3, d'où $5a + 1 \equiv 1 \equiv g \pmod 5$, pas de solution
    - $b = 5$
      - $a = 2$ ou 3, d'où $f = 1$, pas de solution
      - $a = 5$ (resp. 7), d'où $d = 5$ en raisonnant sur l, mais $o = 0$ (resp. 1) pas de solution
    - $b = 7$, d'où $5a + 3 \equiv 3 \equiv g \pmod 5$, $g = 3$, $a = 2$, mais alors $f = 1$, pas de solution
  - $e = 7$, d'où $7b + 3 \equiv 2$ ou encore $b \equiv 2 \pmod 5$
    - $b = 2$, d'où $a = 3$, $f = g = 2$, $l = 2$, $d = 5$, mais alors $j = 1$, pas de solution
    - $b = 7$, mais $\forall a \in \{2, 3, 5, 7\}, g \notin \{2, 3, 5, 7\}$, pas de solution
- $c = 3$ et $e = 5$, mais $5b + 1 \not\equiv 2 \pmod 5$, pas de solution
- $c = 7$ et $e = 5$, mais $5b + 3 \not\equiv 2 \pmod 5$, pas de solution

17 Les divisions de l'année

Deux nombres réels $a \leqslant b$ ont même partie entière ssi il existe un entier k tel que $k \leqslant a$ et $b < k + 1$.
Soient $n \geqslant 0$ et $p \geqslant 1$. Ainsi les rationnels positifs $a = \frac{n}{p+1} \leqslant \frac{n}{p} = b$ ont même partie entière ssi il existe un entier $k \geqslant 0$ tel que $k(p+1) \leqslant n < p(k+1)$, d'où $k < p$.
Pour $0 \leqslant k \leqslant p - 1$ fixé, il y a $p - k$ entiers de $k(p+1)$ à $p(k+1) - 1 = k(p+1) + p - k - 1$.

Sachant que $\sum_{k=0}^{p-1}(p-k) = \sum_{j=1}^{p} j = \frac{p(p+1)}{2}$, et en ôtant le cas $n = 0$ (l'énoncé précise bien "strictement positifs"), le nombre cherché vaut alors $\frac{p(p+1)}{2} - 1 = \frac{(p-1)(p+2)}{2}$.
Application numérique avec $p = 2011$: 2 023 065.

18 Une boule dans un tétraèdre

D'après son patron, le tétraèdre $ABCD$ est trirectangle en A et son volume vaut $v = \frac{1}{3} \times DAC \times AB$ où $DAC = \frac{AD \times AC}{2}$ désigne l'aire de la face DAC. Puisque $AD = \frac{AB}{2} = AC$, alors $v = \frac{AB^3}{24}$.
Soit I le centre de la boule et r son rayon. Le tétraèdre $ABCD$ est alors partitionné en 4 tétraèdres $ABCI, BCDI, CDAI$ et $DABI$. Le volume du tétraèdre $ABCI$ s'exprime en fonction de l'aire de sa base ABC et de sa hauteur de longueur r. D'où $v = \frac{1}{3}(ABC + BCD + CDA + DAB)\, r$. Mais $ABC + BCD + CDA + DAB = AB^2$ à l'aide du patron, d'où $v = \frac{AB^2 \times r}{3}$ et donc $r = \frac{AB}{8}$.
Ainsi $d = 2r = \frac{AB}{4} = 503$ mm.