Corrigé des quarts de finale du CJML 2009

Pour me contacter : florianbaude@fnac.net.

Problème 1

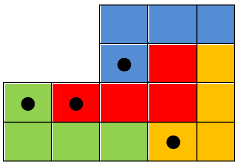
On trouve facilement l'unique solution :

8		
5	3	
4	1	2

Problème 2

Ce cadre contient cinq fois la lettre "c".

Problème 3



Problème 4

Avec un minimum de soin et d'attention, on dénombre facilement 11 carrés entièrement dessinés.

Problème 5

Voici la liste des nombres écrits par Mathilde :

75.
$7 \times 5 + 7 + 5 = 47$.
$4 \times 7 + 4 + 7 = 39$.
$3 \times 9 + 3 + 9 = 39$.
Etc…

A partir du troisième nombre, on obtient toujours 39, donc le vingtième nombre écrit sera 39.

Problème 6

Aucun problème je pense. En un coup d'œil, on trouve que seules les formes B et D conviennent.

Problème 7

Soit a le chiffre caché, a étant un entier compris entre 1 et 9.

L'égalité s'écrit :

$(10a + a + 10a + a + 1) \times a = 100a + 10a + a$

$22a^2 + a = 100a + 10a + a$

$22a^2 - 110a = 0$.

Or a $\neq 0$, donc $22a = 110$, i.e. $a = 5$.

Le chiffre caché est donc 5.

<u>Problème 8</u>

Traduisons l'énoncé par des égalités et des inégalités.

$B + C = E$. (1)

$A + B \geq C + D + E$. (2)

(1) et (2) donnent :

$A \geq 2C + D$. (3)

(3) entraîne que $A > 3$, car $2C + D \geq 4$.

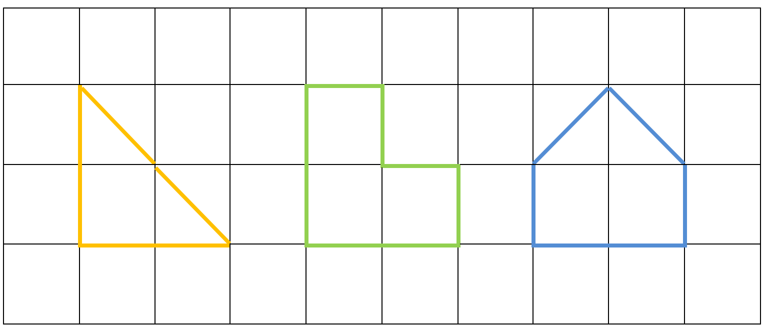
Donc $A = 4$ ou 5.

Si $A = 4$, alors (3) => $C = 1$ et $D = 2$ => $E = B + 1$, ce qui est impossible, car il ne reste que 3 et 5 à attribuer et ce ne sont pas des entiers consécutifs.

Si $A = 5$, alors trois cas se présentent si l'on considère (3) :

> $C = 2$ et $D = 1$ et alors $B + 2 = E$. Or seuls 3 et 4 sont encore disponibles.
>
> $C = 1$ et $D = 3$ et alors $B + 1 = E$. Or seuls 2 et 4 sont encore disponibles.
>
> $C = 1$ et $D = 2$ et alors $B + 1 = E$, ce qui entraîne $B = 3$ et $E = 4$.

<u>Problème 9</u>



Voici, en bleu, une proposition de solution, certainement non unique. Je ne sais pas s'il fallait donner un nombre de solutions possibles. Si tel était le cas, je vous présente mes plus plates excuses !...

<u>Problème 10</u>

Il est sous-entendu dans l'énoncé que chaque case doit contenir un nombre entier. Pour que tel soit le cas, on doit forcément avoir l'enchaînement de calcul suivant (on le trouve par essais successifs), avec les multiplications précédant les additions (donc forcément 37 comme nombre de départ : 1 solution) :

37	⇒	111	⇒	999	⇒	1998	⇒	2007	⇒	2009
	× 3		× 9		× 2		+ 9		+ 2	

Problème 11

Il suffit de faire une liste des nombres commençant par 2009 et de les compter jusqu'à en avoir 2010 :

$$\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}2009\end{array}\right\}\ 1\\
\left.\begin{array}{l}20090\\20091\\\ldots\\20099\end{array}\right\}\ 10\\
\left.\begin{array}{l}200900\\200901\\\ldots\\200999\end{array}\right\}\ 100\\
\left.\begin{array}{l}2009000\\2009001\\\ldots\\2009999\end{array}\right\}\ 1000\\
\left.\begin{array}{l}20090000\\20090001\\\ldots\\20090898.\end{array}\right\}\ 899
\end{array}$$

$$\boxed{1 + 10 + 100 + 1000 + 899 = 2010.}$$

Problème 12

Etablissons pour commencer un critère de divisibilité par 7 :

Propriété : un nombre est divisible par 7 ssi le résultat de la soustraction du nombre de ses dizaines (et pas du chiffre des dizaines !) par le double du chiffre de ses unités est divisible par 7.

Dém. : soit A un nombre. $A = a_0 + 10a_1 + 100a_2 + \ldots + 10^n a_n$, avec n entier ≥ 0 et les a_i compris entre 0 et 9, avec $a_n \neq 0$.

i) Si $7 \mid A$, comme $7 \mid 21a_0$, $7 \mid 10(a_1 + 10a_2 + \ldots + 10^{n-1}a_n - 2a_0)$.

Or 7 et 10 sont premiers entre eux, donc par le lemme de Gauss, $7 \mid a_1 + 10a_2 + \ldots + 10^{n-1}a_n - 2a_0$.

ii) Si $7 \mid a_1 + 10a_2 + \ldots + 10^{n-1}a_n - 2a_0$, alors $7 \mid 10(a_1 + 10a_2 + \ldots + 10^{n-1}a_n - 2a_0)$.

Or $7 \mid 21$, donc $7 \mid 10a_1 + 100a_2 + \ldots + 10^n a_n - 20a_0 + 21a_0$.

Donc $7 \mid A$.

Soient maintenant a, b, c et d quatre entiers compris entre 0 et 9, avec $a \neq 0$.

Nous allons chercher le plus petit nombre s'écrivant abcd en base 10 ($abcd_{10}$) strictement supérieur à 2009 tel que $7 \mid 1000a + 100b + 10c + d$ et $7 \mid 1000d + 100c + 10b + a$.

Raisonnons par implications successives :

$(7 \mid 1000a + 100b + 10c + d$ et $7 \mid 1000d + 100c + 10b + a) \Rightarrow (7 \mid 100a + 10b + c - 2d$ et $7 \mid 100d + 10c + b - 2a) \Rightarrow 7 \mid 98d + 98a + 11b + 11c \Rightarrow 7 \mid 7 \times 14(a + d) + 11(b + c) \Rightarrow 7 \mid b + c \Rightarrow b + c = 0$ ou $b + c = 7$.

$b + c = 0 \Rightarrow b = 0$ et $c = 0$. Le plus petit nombre suivant 2009 est dans ce cas supérieur à 3000.

On va voir que le cas b + c = 7 permet de trouver un nombre convenable strictement inférieur à 3000.

Le cas le plus intéressant serait le cas b = 0 et c = 7. Si un nombre $abcd_{10}$ convient, il s'écrit $a07d_{10}$.

Imposons a = 2. Le nombre s'écrit alors $207d_{10}$.

Y a-t-il un nombre à quatre chiffres commençant par 207 et étant divisible par 7 ?

La réponse est forcément "oui" puisqu'il existe dix tels nombres ($0 \leq d \leq 9$).

Trouvons le plus petit.

2009 est divisible par 7 et $2072 = 2009 + 7 \times 9$.

Donc 2072 est un nombre commençant par 207 et divisible par 7.

Espérons que 2702 est également divisible par 7 !

Utilisons le critère de divisibilité établi plus haut :

$270 - 4 = 266$.
$26 - 12 = 14$, qui est divisible par 7.

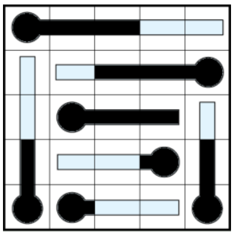
Donc 2702 est divisible par 7.

Donc l'année recherchée est 2072.

Problème 13

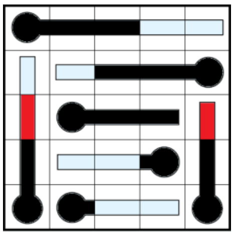
Chaque boule doit être noircie, donc la dernière ligne contenant trois boules, chaque ligne et chaque colonne devra contenir au moins trois cases contenant une portion noircie de thermomètre.

En noircissant de proche en proche, on obtient logiquement l'unique solution suivante avec trois cases noircies dans chaque ligne et chaque colonne :



Est-il possible de noircir quatre cases dans chaque ligne et chaque colonne ?

Non, car il faudrait obligatoirement remplir les cases remplies en rouge ci-dessous, ce qui donnerait cinq cases coloriées dans la troisième ligne, ce qui est interdit :



Il y a donc 1 solution.

Problème 14

Voici la liste, sans les dessins, de toutes les possibilités :

16 petits carrés. (1)
1 grand carré 4×4. (1)
1 carré 3×3 et des petits carrés pour compléter. (4)
4 carrés 2×2, un à chaque coin. (1)
1 carré 2×2 et des petits carrés pour compléter. (9)
2 carrés 2×2 et des petits carrés pour compléter : en diagonale (2), alignés horizontalement ou verticalement (6), un dans un coin et l'autre centré sur un côté (8).
3 carrés 2×2 et des petits carrés pour compléter. (8)

Au total, il y a 1 + 1 + 4 + 1 + 9 + 2 + 6 + 8 + 8 = 40 possibilités.

Problème 15

Soient a, b et c les trois entiers naturels non nuls choisis au départ.

Le quatrième terme de la suite est c(b + a) et le cinquième est c(a + b)(b + c).

On doit avoir c(a + b)(b + c) = 2008.

Décomposons 2008 en produit de facteurs premiers : 2008 = 2×2×2×251 (251 est premier, car il n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 7, ni par 11, ni par 13).

On en déduit que c appartient à la liste des diviseurs de 2008 : {1, 2, 4, 8, 251, 502, 1004, 2008}.

● Si **c = 1** : 2008 = (a + b)(b + 1) = 2×2×2×251.

On peut alors poser le tableau suivant :

b + 1	**a + b**	**b**	**a**
2	1004	1	1003
4	502	3	499
8	251	7	244

Et il n'y a pas d'autre solution possible, car on doit avoir a + b ≥ b + 1.

● Si **c = 2** : 1004 = (a + b)(b + 2) = 2×2×251

On pose de même un tableau :

b + 2	**a + b**	**b**	**a**
4	251	2	249

Et il n'y a pas d'autre solution possible, car on doit avoir a + b ≥ b + 1.

● Si **c = 4** : 502 = (a + b)(b + 4) = 2×251.

Impossible.

● Si **c = 8** : 251 = (a + b)(b + 8).

Impossible.

● Si **c = 251** : 8 = (a + b)(b + 251).

Impossible.

● De même, les cas **c = 502**, **c = 1024** et **c = 2008** ne donnent bien sûr pas de solutions.

On trouve donc quatre triplets convenables : (1003 ; 1 ; 1), (499 ; 3 ; 1), (244 ; 7 ; 1) et (249 ; 2 ; 2).

Problème 16

Je sèche, toute aide sera la bienvenue (vous pouvez me contacter tous les jours à cette adresse : florianbaude@fnac.net).

Problème 17

Une vache broute **a** kilos d'herbe par jour.

Dans un are de champ il pousse chaque jour **b** kilos d'herbe et il y a au départ **c** kilos d'herbe.

On suppose bien sûr que a, b et c sont des réels strictement positifs.

● Dans un champ de 10 ares il y a donc au bout de 10 jours, sans broutage, 10(c + 10b) kilos d'herbe.
Les 10 vaches broutent dans le même temps 10a kilos d'herbe par jour, donc en 10 jours, 100a kilos d'herbe.
Au bout des 10 jours il n'y a plus d'herbe, donc 10(c + 10b) – 100a = 0, i.e. c + 10b – 10a = 0.

● Dans un champ de 22 ares il y a au bout de 44 jours, sans broutage, 22(c + 44b) kilos d'herbe.
Les 15 vaches broutent dans le même temps 15a kilos d'herbe par jour, donc en 44 jours, 15×44a kilos d'herbe.
Au bout des 44 jours il n'y a plus d'herbe, donc 22(c + 44b) – 15×44a = 0, i.e. c + 44b – 30a = 0.

On déduit des deux relations entre a, b et c :

$$\boxed{\begin{array}{c} 10a = 17b \\ c = 7b \\ 70a = 17c \end{array}}$$

Notons x le nombre de jours nécessaires pour que 20 vaches broutent toute l'herbe d'un champ de 17 ares.

● Dans un champ de 17 ares il y a au bout de x jours, sans broutage, 17(c + xb) kilos d'herbe.
Les 20 vaches broutent dans le même temps 20a kilos d'herbe par jour, donc en x jours, 20×x×a kilos d'herbe.
Au bout des x jours il n'y a plus d'herbe, donc 17(c + xb) – 20×x×a = 0, i.e. 17c + 17xb – 20xa = 0.
Cette équation se réécrit, à l'aide des relations entre a, b et c :

70a + 10ax – 20xa = 0

10ax = 70a

$x = \frac{70a}{10a} = 7$.

La réponse est donc 7 jours.

Problème 18

Notons a la largeur du rectangle de base et a + k la longueur du rectangle de base, avec a et k des entiers strictement positifs.

La première couche comporte a(a + k) boulets.
La deuxième couche comporte (a – 1)(a + k – 1) boulets.
…
La a$^{\text{ème}}$ et dernière couche comporte (a – (a – 1))(a + k – (a – 1)) boulets.

La longueur de la dernière couche est égale à k + 1. L'énoncé impose k + 1 = a, donc k = a – 1.

Donc le rectangle de base a une largeur de a boulets et une longueur de 2a – 1 boulets.

Le nombre total de boulets est donc égal à :

N = (a – 0)(2a – 1 – 0) + (a – 1)(2a – 1 – 1) + (a – 2)(2a – 1 – 2) + … + (a – (a – 1))(2a – 1 – (a – 1)).

Essayons d'écrire cette expression sous une forme plus simple à étudier :

$N = a(2a - 1)a + \sum_{i=1}^{a-1} i^2 + \sum_{i=1}^{a-1} i + \sum_{i=1}^{a-1} -3ia$.

$N = a(2a - 1)a + \sum_{i=1}^{a-1} i^2 + (1 - 3a)\sum_{i=1}^{a-1} i$.

D'où, à l'aide des formules de sommation bien connues :

$$N = a^2(2a - 1) + \frac{(a-1)a(2a-1)}{6} + \frac{(1-3a)(a-1)a}{2}$$

$$\boxed{N = \frac{5a^3+3a^2-2a}{6}\ .}$$

Le nombre de boulets contenus dans le tas est donné par la formule encadrée.

On veut maintenant que N soit un carré parfait, que l'on notera A^2.

On veut donc : $5a^3 + 3a^2 - 2a = \underline{a(a + 1)(5a - 2) = 6A^2}$.

a = 6 donne $6A^2 = 6 \times 196$, ce qui donne N = 196. C'est une solution !

Mais comment trouver l'autre et prouver qu'il n'y en a pas une troisième, je ne vois pas !!

Il s'agit de résoudre a(a + 1)(5a – 2) = 6N, i.e. de trouver les valeurs de a pour lesquelles N est un carré parfait.

Si vous trouvez comment résoudre cette équation, merci de me faire signe !!!! (florianbaude@fnac.net).