Corrigé de la deuxième journée de la finale du CJML 2009

Problème 1

Pour obtenir un total maximal, on voit facilement qu'il faut choisir comme date le 29 septembre 2009, ce qui donne un total de 2 + 9 + 9 + 2 + 0 + 0 + 9 = 31.

Problème 2

Intacte, la pyramide a 8 arêtes. Une fois découpée aux quatre sommets, les quatre coins de la base donnent chacun trois arêtes supplémentaires et le sommet en donne quatre.

Le solide obtenu a donc 24 arêtes.

Problème 3

On trouve facilement la configuration suivante :

5
45
345
2345
12345.

Problème 4

On trouve 32 petits carrés blancs et 16 carrés blancs composés de 2 × 2 petits carrés blancs.

La figure compte donc 48 carrés entièrement dessinés ne contenant pas de gris.

Problème 5

2012 = 4 × 503.

Mathias va donc écrire 503 années. Il a commencé à 2009.

La 503$^{\text{ème}}$ année qu'il écrira sera composée des quatre derniers chiffres de la liste.

Il s'agira de 2009 + 502 = 2511.

Problème 6

Les parcelles sont toutes composées d'un nombre distinct de petits carrés.

Numérotons-les par ordre croissant, selon le nombre de petits carreaux qu'elles contiennent :

Parcelle 1 : 8 carreaux.
Parcelle 2 : 10 carreaux.
Parcelle 3 : 12 carreaux.
Parcelle 4 : 14 carreaux.
Parcelle 5 : 16 carreaux.

Il faut bien sûr planter les plantes les moins chères dans les plus grandes parcelles et inversement.

On va donc associer fleurs et parcelles de la manière suivante :

Parcelle 1 : 8 euphorbes.
Parcelle 2 : 10 dahlias.
Parcelle 3 : 12 camélias.
Parcelle 4 : 14 bleuets.
Parcelle 5 : 16 anémones.

Rose va donc dépenser au minimum :

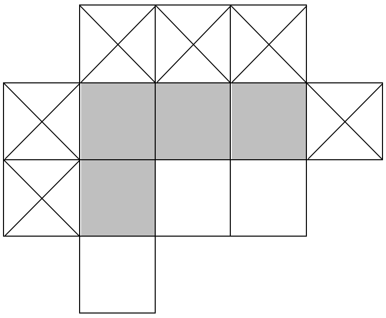
$8 \times 1.75 + 10 \times 1.5 + 12 \times 1.25 + 14 \times 1 + 16 \times 0.75 = 0.25 \times (56 + 60 + 60 + 56 + 48) =$ 70 €.

Problème 7

On trouve facilement :

$$\begin{array}{r} 1963 \\ \underline{\times \quad 4} \\ 7852. \end{array}$$

Problème 8



Pas de souci si on a une bonne vision dans l’espace.

Problème 9

Soit x le nombre de personnes présentes dans le bus au départ.

Au départ, il y a 0.4x filles et 0.6x garçons.

Au premier arrêt, il y a 0.4x – 2 filles et 0.6x garçons.

Au deuxième arrêt, il y a 0.4x – 2 filles et 0.6x + 2 garçons.

Il y a finalement toujours x personnes dans le bus dont 0.3x filles (les 30 %).

On obtient donc l’équation :

$0.4x - 2 = 0.3x$, c’est-à-dire $x = 20$.

Il y a donc au bout du compte 6 filles dans le bus. 1 solution.

Problème 10

Dressons une liste des quantités de jetons aux premiers tours, écrites à chaque tour dans l'ordre croissant :

Tour	**Plus petit nombre de jetons**	**Deuxième plus grand nombre de jetons**	**Plus grand nombre de jetons**
Départ	99	100	101
Tour 1	98	100	101
Tour 2	98	99	101
Tour 3	98	99	100
Tour 4	97	99	100
Tour 5	97	98	100
Tour 6	97	98	99
Tour 7	96	98	99
Tour 8	96	97	99
Tour 9	96	97	98
Tour 10	95	97	98
……….			
Tour 292	1	3	4
Tour 293	1	2	4
Tour 294	1	2	3
Tour 295	0	2	3

Au départ, les quantités de jetons sont des entiers successifs : 99, 100 et 101.

Au premier tour, on diminue la première quantité de 1.

Au deuxième tour, on diminue la deuxième quantité de 1.

Au troisième tour, on diminue la troisième quantité de 1 et on retrouve une suite d'entiers successifs.

Pendant les trois premiers tours, le plus petit des trois nombres est 98.

Pendant les trois suivants, c'est 97, etc…

Pendant $3 \times 98 = 294$ tours, on n'a pas de nombre nul.

Des tours 292 à 294, le plus petit nombre est 1.

C'est donc au 295$^{\text{ème}}$ tour que l'une des quantités s'annule pour la première fois.

Il y aura donc 295 tours.

Problème 11

Supposons qu'il y a n femmes autour de la table : Catherine et n – 1 amies. On décide que Catherine et la femme n° 1.

Chacune a bu x litres de café au lait.

A chacune des femmes on associe un nombre a_i tel que $0 < a_i < 1$ et i entier compris entre 1 et n.

On suppose que la femme n° i a bu $a_i x$ litres de lait et $(1 - a_i)x$ litres de café.

Catherine a bu un quart de la quantité totale de café.

On a donc $(1 - a_1)x = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} (1 - a_i)x$, c'est-à-dire $n - 4 + 4a_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Catherine a bu un sixième de la quantité totale de lait.

On a donc : $a_1x = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n} a_ix$, c'est-à-dire $6a_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

On a donc trouvé deux expressions différentes pour la somme des a_i que l'on va pouvoir égaler :

$n - 4 + 4a_1 = 6a_1$

$2a_1 = n - 4$.

Or $0 < 2a_1 < 2$.

Donc $0 < n - 4 < 2$.

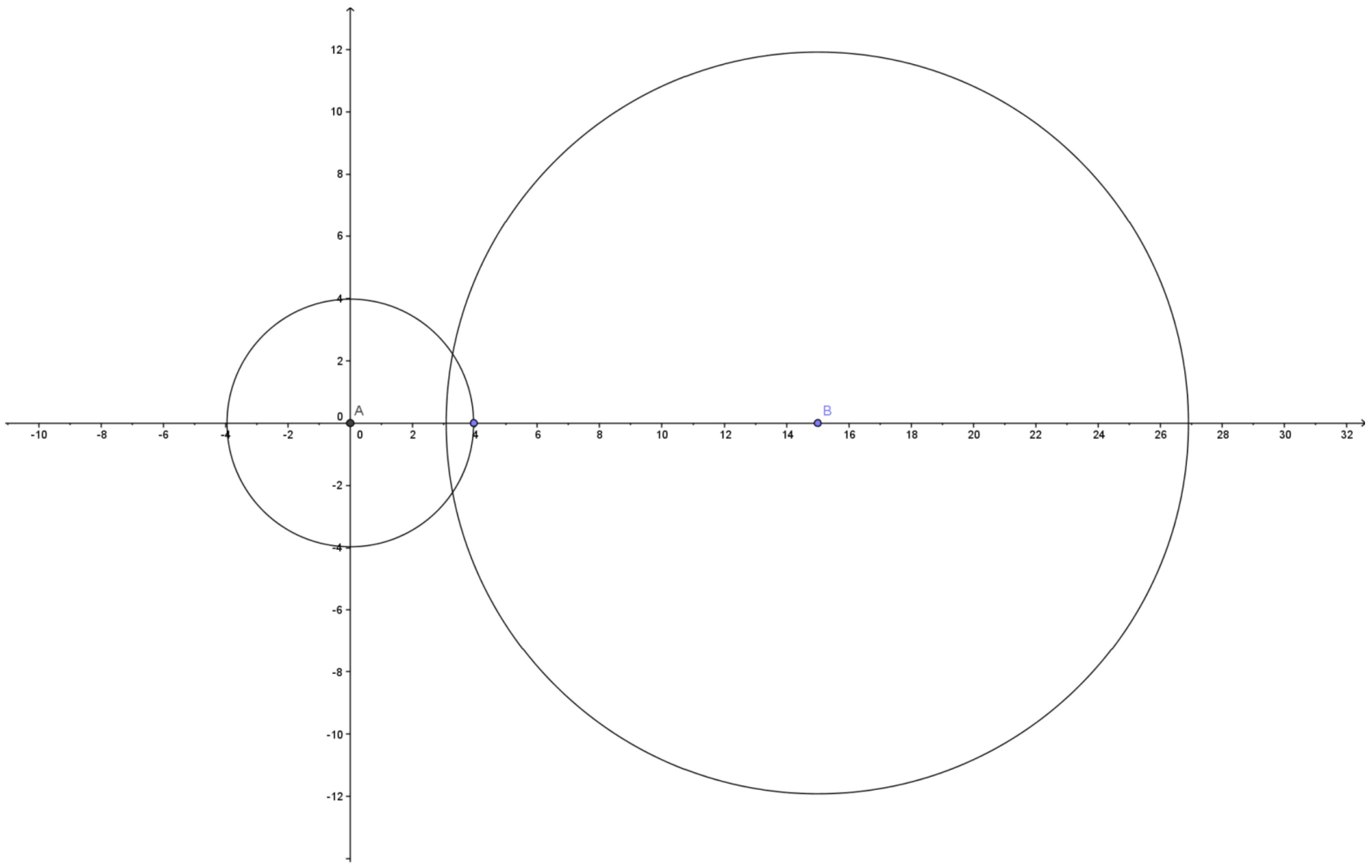
Donc $4 < n < 6$.

Or n est un entier, donc n = 5.

Il y a 5 femmes en tout : Catherine et 4 amies. 1 solution.

Problème 12

Commençons par faire un dessin :



On a dessiné un cercle de centre A(0 ; 0) et de rayon a et un cercle de centre B(15 ; 0) et de rayon 3a.

Notre but est de trouver pour quelles valeurs de a les deux cercles ne sont pas disjoints.

Facilement, ils vont être tangents extérieurement pour a = 3.75 cm et tangents intérieurement lorsque : 15 + a = 3a, donc a = 7.5 cm.

On doit donc avoir $3.75 \leq a \leq 7.5$.

Donc, a étant un nombre entier, il est au maximum égal à 7 cm. On peut alors construire notre triangle à partir des point A et B et d'un des points d'intersection des deux cercles.

Alors le périmètre du rectangle est égal à $15 + 7 + 3 \times 7 =$ 43 cm. 1 solution.

<u>Problème 13</u>

Supposons que le demi-périmètre du cercle est égal à un certain nombre a.

Michel et Laurent se croisent la première fois au temps t_1 (unité : secondes) après avoir parcouru en tout un demi-cercle.

Donc Michel a parcouru 100 mètres et Laurent a – 100 mètres. Cela signifie au passage que $a > 100$.

Lors de leur deuxième rencontre, au temps t_2, Laurent a parcouru 150 mètres de plus. Comme ils sont partis, après leur première rencontre, du même point, ils ont parcouru, en faisant la somme des distances parcourues par chacun après cette rencontre, un tour complet, donc 2a mètres. Donc entre le temps t_1 et le temps t_2 Michel a parcouru 2a – 150 mètres.

Afin de déterminer a, il faut introduire l'idée de vitesse.

Laurent parcourt a – 100 mètres en t_1 secondes et 150 mètres en $t_2 - t_1$ secondes.

On peut donc écrire le produit en croix : $(a - 100)(t_2 - t_1) = 150t_1$.

D'où $t_2 - t_1 = \frac{150}{a-100} t_1$.

Donc Michel qui parcourt 100 mètres en t_1 secondes parcourt en $t_2 - t_1$ secondes $100 \times \frac{150}{a-100}$ mètres.

On a donc, en bleu, deux expressions de la distance parcourue par Michel entre les temps t_1 et le temps t_2.

On obtient donc une équation du premier degré en a :

$$100 \times \frac{150}{a-100} = 2a - 150$$

$$15000 = 2a^2 - 200a - 150a + 15000$$

$$2a^2 = 350a.$$

Comme $a \neq 0$ (sinon le problème n'aurait pas d'intérêt), on peut diviser les deux membres par a et on obtient :

2a = 350 mètres, ce qui correspond au périmètre de la piste. 1 solution.

<u>Problème 14</u>

Pour les pages de 1 à 9, on fait tout simplement la somme de tous les chiffres et on obtient 45.

Ensuite, pour ce qui est des nombres entre 10 et 99, les multiples de 10 sont les seuls nombres contenant des zéros. Ces multiples donnent également 45. La somme résultante pour ces nombres est donc :
45 + (10 + 11 + … + 99) – (10 + 20 + 30 + 40 + 50 + 60 +70 + 80 + 90) = 4500.

Passons maintenant aux nombres entre 100 et 999, c'est-à-dire les nombres à trois chiffres.
Regardons d'abord ceux contenant deux zéros : ce sont les multiples de 100. Donc la somme résultante est 1 + 2 + … + 9 = 45.
Regardons ensuite ceux contenant un zéro. Ce zéro est forcément en deuxième ou en troisième position. Le nombre commence par un des chiffres de 1 à 9 puis on a ensuite dix-huit possibilités pour finir d'écrire le nombre : un zéro puis un chiffre de 1 à 9 ou un chiffre de 1 à 9 puis un zéro. La somme résultante est :
((10 +11 + … + 99) – (10 + 20 + 30 + 40 + 50 + 60 +70 + 80 + 90)) × 2 = 8910.
Reste pour finir les nombres compris entre 100 et 999 ne contenant pas de zéro. Ce sont tous les nombres de trois chiffres s'écrivant avec les chiffres de 1 à 9. La somme résultante est :
(100 + 101 + … + 999) – 100 × (1 + 2 + … + 9) – (1 + 2 + … + 9) × 100 × 18 – 9 × ((1 + 2 + … + 9) + (10 + 20 + 30 + 40 + 50 + 60 + 70 + 80 + 90)) = 404595 (ardu à trouver à la main !!).

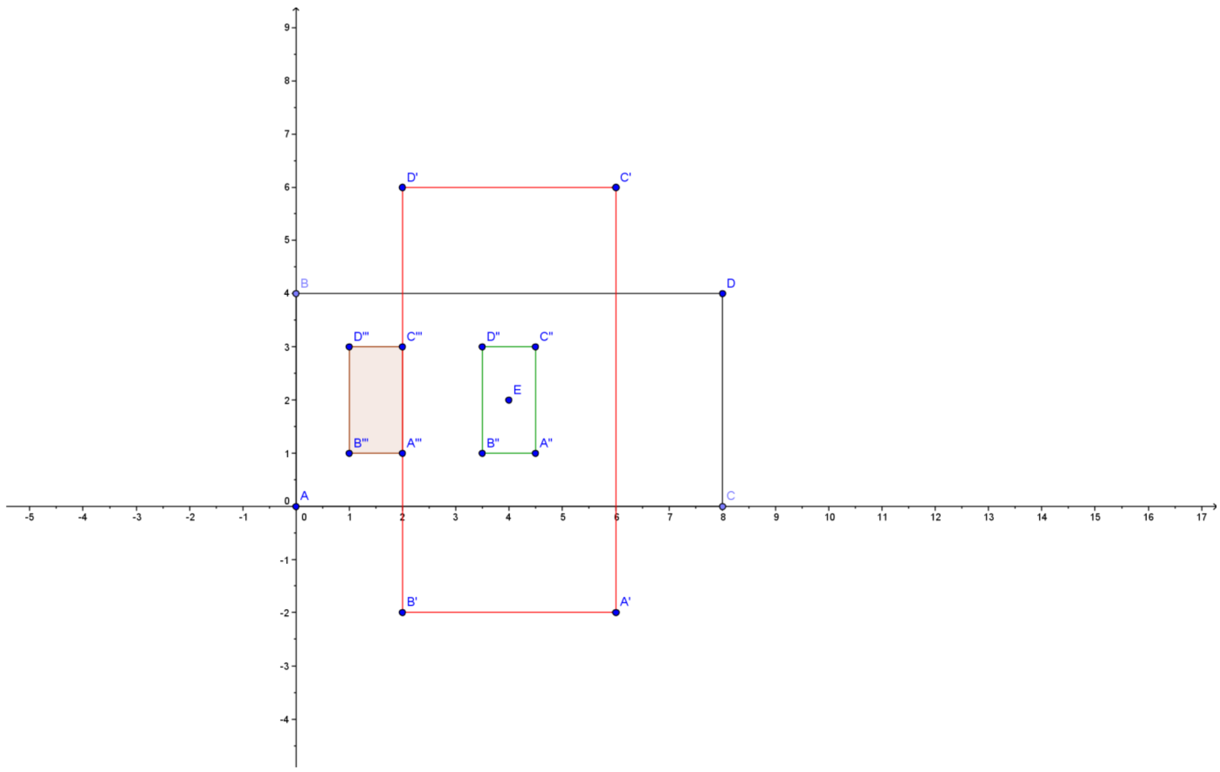
La somme recherchée est donc finalement : 45 + 4500 + 45 + 8910 + 404595 = 418095. Ouf !!

Problème 15

Le problème se résout assez simplement si l'on pense à utiliser les nombres complexes (j'ai mis au moins une heure pour avoir cette idée !).

Il s'agit de déterminer quelle transformation du plan permet de passer du grand rectangle orienté au petit rectangle orienté et d'en chercher les points fixes.

Faisons un dessin :



On se place donc dans le plan complexe.

La rotation r de centre E et d'angle $\frac{\pi}{2}$ permet de passer de ABDC à A'B'D'C'.

L'homothétie h de centre E et de rapport $\frac{1}{4}$ permet de passer de A'B'D'C' à A''B''D''C''.

La translation t de vecteur $(-\frac{5}{2}\,;0)$ permet de passer de A’’B’’D’’C’’ à A’’’B’’’D’’’C’’’.

Donc la transformation totale est $t \circ h \circ r$.

En termes d’affixes, si on a un point M d’affixe z :

$r(z) = i(z - z_E) + z_E$.

$h(z) = \frac{1}{4}(z - z_E) + z_E$.

$t(z) = z - \frac{5}{2}$.

Donc après quelques calculs, on trouve :

$t \circ h \circ r\,(z) = z_E - \frac{5}{2} + \frac{1}{4}\,i\,(z - z_E)$.

Reste à chercher les éventuels points fixes :

$z_E - \frac{5}{2} + \frac{1}{4}\,i\,(z - z_E) = z$.

Sachant que $z_E = 4 + 2i$, après quelques calculs, on obtient un unique point fixe :

$z = \frac{28+4i}{17}$, ce qui correspond au point de coordonnées $(\frac{28}{17}\,;\frac{24}{17})$ que l’on va noter F.

On remarque que ce point est bien situé sur la carte posée sur la plage.

Une unité dans nos calculs correspond à 1.7 mètres sur la plage.

Donc, exprimées en mètres, les coordonnées de F sont (2,8 ; 2,4).

Donc, en décimètres, on a F(28 ; 24). C’est là que se trouve le trésor.

Problème 16

Je sèche. Toute aide sera la bienvenue !

Problème 17

Dénombrons pour commencer le nombre total de briques possibles. Il s’agit en fait de dénombrer le nombre de triplets de trois entiers compris entre 1 et 7 que l’on peut créer sans tenir compte de l’ordre :

Triplets avec trois nombres identiques : il y en a bien sûr 7.

Triplets avec deux nombres identiques : il y a 7 façons de choisir le nombre qui apparaît deux fois, puis 6 façons de choisir celui qui apparaît une fois, ce qui donne 6 × 7 = 42 briques possibles.

Triplets avec trois nombres distincts : il y en a $\binom{7}{3}$ (coefficient binomial), c’est-à-dire $\frac{7!}{4!3!}$, ce qui est égal à 35.

Il y a donc en tout 7 + 42 + 35 = 84 briques différentes.

A ce stade, je ne vois pas d'autre solution que de faire la liste des briques (il y en a une quantité raisonnable) et de faire tous les calculs à la main. Mais c'est bien entendu très long quoiqu'envisageable. Pour gagner du temps j'ai établi facilement la liste de tous les triplets convenables à la main puis ai effectué tous les calculs à l'aide d'Excel. Voici la feuille de calcul obtenue :

N°	Longueur (L)	Largeur (l)	Hauteur (H)	V/(Max(L, l, H))^2
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4
5	5	5	5	5
6	6	6	6	6
7	7	7	7	7
8	1	1	2	1/2
9	1	1	3	1/3
10	1	1	4	1/4
11	1	1	5	1/5
12	1	1	6	1/6
13	1	1	7	1/7
14	2	2	1	1
15	2	2	3	1 1/3
16	2	2	4	1
17	2	2	5	4/5
18	2	2	6	2/3
19	2	2	7	4/7
20	3	3	1	1
21	3	3	2	2
22	3	3	4	2 1/4
23	3	3	5	1 4/5
24	3	3	6	1 1/2
25	3	3	7	1 2/7
26	4	4	1	1
27	4	4	2	2
28	4	4	3	3
29	4	4	5	3 1/5
30	4	4	6	2 2/3
31	4	4	7	2 2/7
32	5	5	1	1
33	5	5	2	2
34	5	5	3	3
35	5	5	4	4
36	5	5	6	4 1/6
37	5	5	7	3 4/7
38	6	6	1	1
39	6	6	2	2
40	6	6	3	3

41	6	6	4	4
42	6	6	5	5
43	6	6	7	5 1/7
44	7	7	1	1
45	7	7	2	2
46	7	7	3	3
47	7	7	4	4
48	7	7	5	5
49	7	7	6	6
50	1	2	3	2/3
51	1	2	4	1/2
52	1	2	5	2/5
53	1	2	6	1/3
54	1	2	7	2/7
55	1	3	4	3/4
56	1	3	5	3/5
57	1	3	6	1/2
58	1	3	7	3/7
59	1	4	5	4/5
60	1	4	6	2/3
61	1	4	7	4/7
62	1	5	6	5/6
63	1	5	7	5/7
64	1	6	7	6/7
65	2	3	4	1 1/2
66	2	3	5	1 1/5
67	2	3	6	1
68	2	3	7	6/7
69	2	4	5	1 3/5
70	2	4	6	1 1/3
71	2	4	7	1 1/7
72	2	5	6	1 2/3
73	2	5	7	1 3/7
74	2	6	7	1 5/7
75	3	4	5	2 2/5
76	3	4	6	2
77	3	4	7	1 5/7
78	3	5	6	2 1/2
79	3	5	7	2 1/7
80	3	6	7	2 4/7
81	4	5	6	3 1/3
82	4	5	7	2 6/7
83	4	6	7	3 3/7
84	5	6	7	4 2/7
			Total :	**167 5/12 = 2009/12**

Problème 18

Je sèche. Toute aide sera la bienvenue !

Pour me contacter : florianbaude@fnac.net.