DF CJML 2014 – Correction personnelle

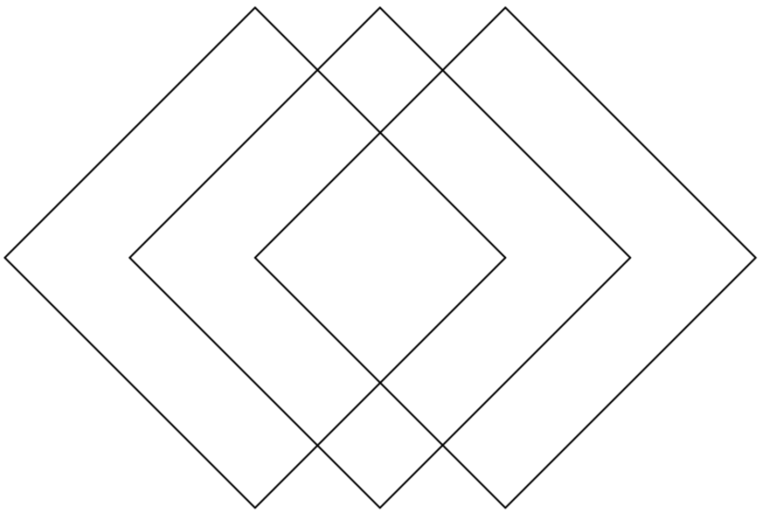
Auteur : *Florian Baude (florianbaude@fnac.net)*

Problème 18 non cherché.

Exercice 1

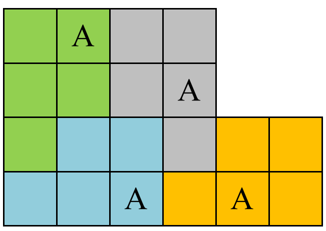
1 + 23 + 4 + 5 + 67 = 100.

Exercice 2



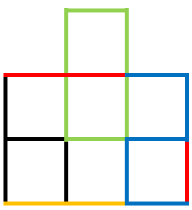
En imbriquant trois grands carrés, on obtient **8 carrés** de tailles diverses.

Exercice 3



Il y a vingt carreaux. Chaque parcelle doit en occuper cinq.

Exercice 4



Les allumettes à supprimer apparaissent en rouge sur le dessin.

Exercice 5

Il n'y a qu'une seule possibilité :

	12	**6**	
9	1	**2**	10
7	**4**	**3**	**8**
	5	11	

Exercice 6

Notons t l'aire d'un petit triangle rectangle et r l'aire d'un petit rectangle.

Les deux premiers sapins donnent le système suivant :

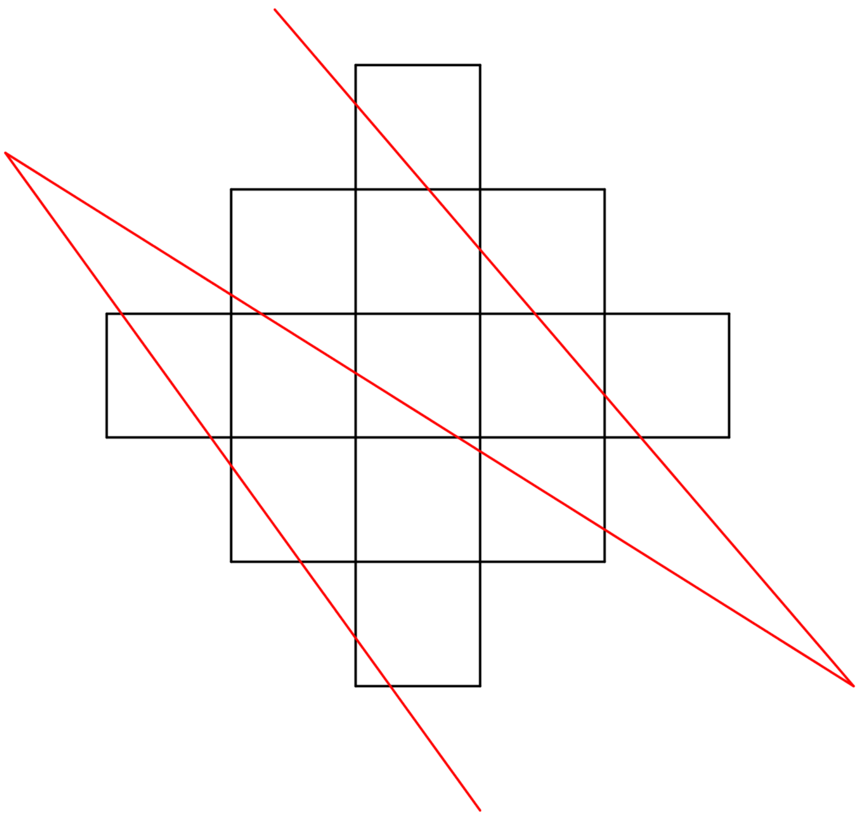
$$\begin{cases} 4t + r = 8 \\ 6t + 3r = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4t + r = 8 \\ 2t + r = 5 \end{cases}.$$

D'où $2t = 3 \Leftrightarrow t =$ <u>1,5 cm²</u>.

D'où $r =$ <u>2 cm²</u>.

D'où l'aire du grand sapin : $8t + 6r = 8 \times 1{,}5 + 6 \times 2 = 12 + 12 =$ **24 cm²**.

Exercice 7 (facile, mais l'énoncé aurait pu préciser que le Z pouvait sortir du motif !)



Exercice 8

On se convainc facilement que la seule possibilité est de compter les huit dans un livre de 98 pages.

Le huit apparaît alors vingt fois (8, 18, 28, 38, 48, 58, 68, 78, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 98).

Si l'on retire treize pages, le livre comporte alors 85 pages et le huit n'apparaît plus que quatorze fois (8, 18, 28, 38, 48, 58, 68, 78, 80, 81, 82, 83, 84, 85).

Le livre compte bien **98 pages**.

Exercice 9

Soit n le nombre cherché. On sait que $0 < n \leq 2014$.

6 divise $n - 6$.
7 divise $n - 7$.
8 divise $n - 8$.
9 divise $n - 9$.

Par conséquent, 6, 7, 8 et 9 divisent n. Donc $\text{ppcm}(6, 7, 8, 9) \mid n$.

Or $\text{ppcm}(6, 7, 8, 9) = 504$.

Donc $n = 504k$, avec $k \in \mathbb{N}^*$.

L'encadrement de départ est respecté lorsque $k = 1$, 2 ou 3.

Donc il y a **trois solutions** : **504**, **1008** et **1512**.

Exercice 10

Notons l et L la largeur et la longueur du rectangle. Le triangle rectangle isocèle a ses deux côtés égaux de longueur l.

$l \times L = 1200$ et l et L sont des multiples de 10.

Par ailleurs, l'aire du trapèze est égale à $\frac{(L + L + l) \times l}{2}$.

Voici toutes les combinaisons possibles :

l	L	Aire
10	120	**1250**
20	60	**1400**
30	40	**1650**
40	30	**2000**
60	20	**3000**
120	10	**8400**

On obtient **six valeurs possibles** pour l’aire du trapèze.

Exercice 11

Voici une possibilité, en **quinze mouvements**, mais est-elle optimale (oui d’après la réponse officielle) ?

Départ

b	b	
b		n
	n	n

Mouvement 1

b		
b	b	n
	n	n

Mouvement 2

b	n	
b	b	n
		n

Mouvement 3

b	n	
b	b	n
	n	

Mouvement 4

b	n	
b	b	
	n	n

Mouvement 5

b	n	
	b	b
	n	n

Mouvement 6

	n	
b	b	b
	n	n

Mouvement 7

n		
b	b	b
	n	n

Mouvement 8

n	n	
b	b	b
		n

Mouvement 9

n	n	
b	b	b
	n	

Mouvement 10

n	n	
b	b	
	n	b

Mouvement 11

n	n	
	b	b
	n	b

Mouvement 12

	n	
n	b	b
	n	b

Mouvement 13

n		
n	b	b
	n	b

Mouvement 14

n	n	
n	b	b
		b

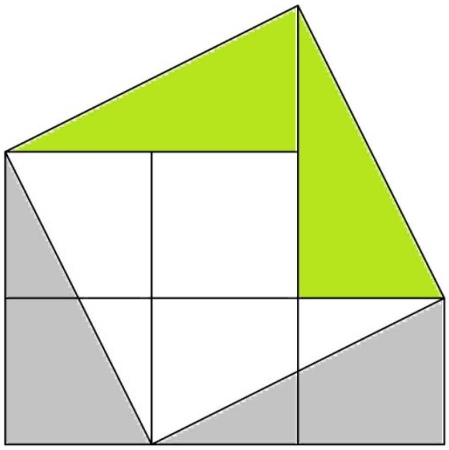
Mouvement 15

n	n	
n		b
	b	b

Exercice 12

Notons a la longueur du côté d'un des cinq petits carrés. Le grand carré final aura une aire de $5a^2$ et ses côtés auront donc pour longueur $\sqrt{5}\ a^2$, ce qui correspond à la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle de petits côtés a et 2a.

D'où la construction, avec les parties découpées en gris et, en vert, l'emplacement où il faut les recoller :



L'unicité reste à déterminer…

Exercice 13

Il semble que **trois échanges** suffisent :

Etat initial :

1	2	3
1	2	3
1	2	3

Mouvement 1 :

1	2	1
1	2	3
3	2	3

Mouvement 2 :

1	3	1
1	2	3
3	2	2

Mouvement 3 :

2	3	1
1	2	3
3	1	2

Exercice 14 (trouvé, mais en quoi est-ce une suite arithmétique ??)

Calculons les premiers termes de la suite (les détails du calcul fractionnaire élémentaire ne sont pas données) :

$a_1 = 20$.

$a_2 = 14$.

$a_3 = \frac{3}{4}$.

$a_4 = \frac{1}{8}$.

$a_5 = \frac{3}{4}$.

$a_6 = 20$.

$a_7 = 14$.

On retrouve les mêmes termes indéfiniment avec une périodicité de cinq termes.

$2014 = 402 \times 5 + 4$. D'où $\mathbf{a_{2014} = a_4 = \frac{1}{8}}$.

Exercice 15

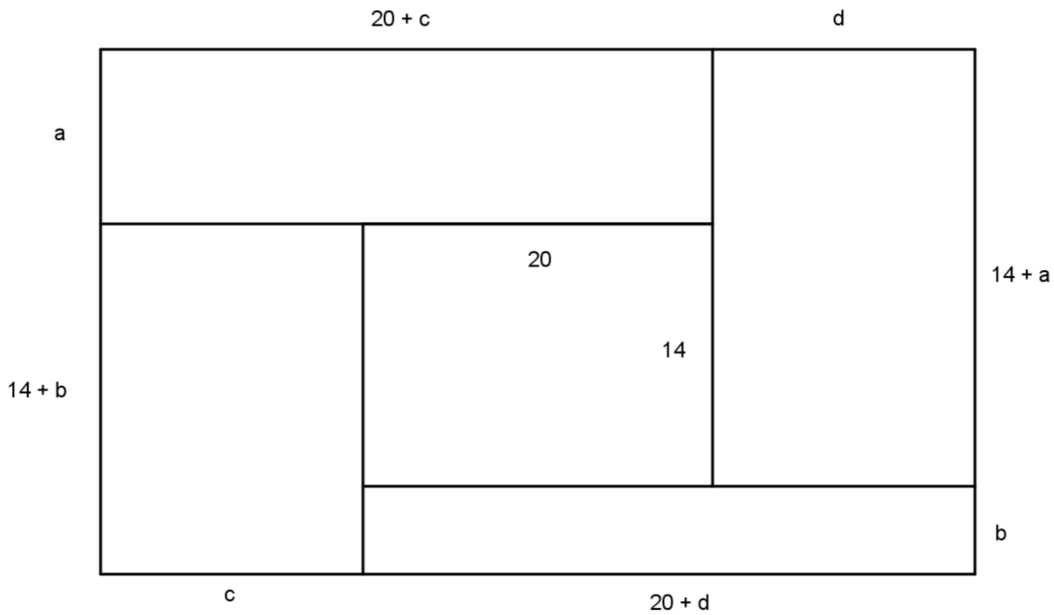
A l'aide de MAPLE (à la main ?), on trouve **deux solutions** :

```
> restart:liste:=NULL:
> for a from 1 to 9 do:
> for b from 0 to 9 do:
> for c from 0 to 9 do:
> if 100*a+10*b+c=11*(a^2+b^2+c^2) then liste:=liste,[a,b,c] fi:
> od:od:od:liste;
                                  [5, 5, 0], [8, 0, 3]
```

Les solutions sont **550** et **803**.

Exercice 16 (une assertion utilisée (en bleu ciel) mériterait d'être démontrée)

Voici un schéma sur lequel sont définies les différentes variables :



Puisque les aires des quatre rectangles gris doivent être égales, on a la chaîne d'égalité suivante :

$20a + ca = 14d + ad = 20b + db = 14c + bc$.

Les solutions doivent être des entiers naturels non nuls et la quantité $20a + ca$ doit être minimale.

Si l'on suppose que $a = b$ et $c = d$ (**condition nécessaire ?**), le problème se ramène à résoudre l'équation :

$20a + ac = 14c + ac$, d'où l'on tire $a = \frac{7}{10}c$.

Plus a est petit, plus c est petit et plus l'aire à minimaliser est petite.

On choisit $c = 10$ (pour que a soit entier) et donc $a = 7$ et l'aire cherchée est égale à **210 dm²**.

Exercice 17

Le pentagone central est régulier du fait de l'égalité de longueur de toutes les arêtes du solide.

Notons O son centre et calculons le rayon R du cercle de centre O contenant tous les sommets du pentagone :

$R = \frac{19}{2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}$ mm (on retrouve aisément ce résultat à l'aide d'un cercle trigonométrique).

Notons h la hauteur de la pyramide supérieure.

D'après Pythagore, $h^2 + R^2 = 19^2$, d'où :

Longueur de la sixième arête du tétraèdre = $2h = 38\sqrt{1 - \frac{1}{4sin^2(\frac{\pi}{5})}}$ = 19,97778… ≈ **20 mm**.

Il me semble que ce n'était pas calculable à la main…

Exercice 18

Non cherché…