Demi-finales

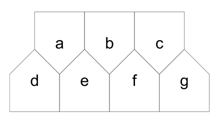
Daniel Collignon

17 mars 2012

1 Le rétroviseur

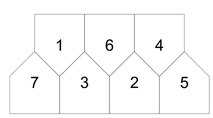
Dans un miroir, le 2 devient un 5, contrairement à 0 et 1 qui sont invariants. Par contre le sens de lecture est inversé et donc l'image de 2012 est 5105.

2 Les 7 briques



Nous avons $a + \cdots + g = 1 + \cdots + 7 = 28$ et $d + a + e + c + f + g = 11 + 11 = 22$. D'où $b = 6$ et $e + f = 11 - b = 5$ et $\{e, f\} = \{2, 3\}$ puisque $a = 1$ est déjà placé. Si $e = 2$, alors nous aurions $d = 11 - a - e = 8$. Donc $e = 3$ et $f = 2$.

La solution suivante est unique à permutation près de c et g.



3 Le circuit

Parmi les 10 virages que compte ce circuit, nous dénombrons 7 virages à droite sur un tour complet (ce sont les virages n°1, 2, 3, 4, 8, 9 et 10). Le dernier tour, il aura tourné 6 fois à droite, n'empruntant pas le virage n°10.

Puisque $\frac{111-6}{7} = 15$, il est donc passé $15 + 1 = 16$ fois près du rocher.

4 Le poulailler

En comptant les cases des lignes du haut et du bas et sachant qu'il y a au moins 1 oeuf par case, il y a au moins $10 + 1 + 1 + 10 = 22$ oeufs.

La configuration suivante où $1 \leqslant x \leqslant 8$ montre que le minimum est bien atteint.

x	1	$9-x$
1	X	1
$9-x$	1	x

5 Téléphones à gogo

Il s'est vendu $15-1+4=18$ téléphones après le compte de Laurent.

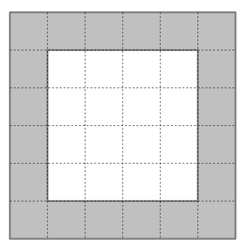
Le total du mois était alors de $218-18=200$ téléphones.

6 Arrière-pensée

En remontant les calculs comme suggéré par le titre, Mathias a pensé au nombre $\frac{\left(\frac{10^6}{10^5}+2\right)\times 144-792}{3}=312$.

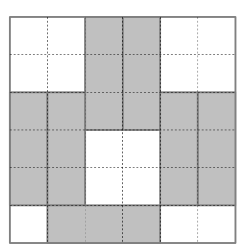
7 Les triminos

Si chacune des 4 rangées du bord possède au moins 1 trimino orienté dans le sens de la rangée, alors le carré central 4x4 nécessite 4 triminos pour supprimer les 4 alignements disjoints de même orientation : il faut donc au moins 8 triminos.



Sinon, quitte à tourner le damier, supposons que la première ligne est sans trimino horizontal. Il en est alors de même pour les deuxième et troisième lignes : en effet sinon il serait impossible de recouvrir l'alignement de la première ligne en regard du trimino horizontal placé sur la deuxième ou troisième ligne. Le rectangle supérieur 3x6 nécessite alors 6 triminos verticaux pour supprimer les 6 alignements verticaux disjoints ; certains peuvent déborder sur le rectangle inférieur mais ils n'affectent pas la ligne du bas : il faut donc au moins 7 triminos.

L'exemple suivant montre que 7 triminos sont suffisants et laissent donc au plus $6^2-7\times 3=15$ cases vides sans alignement.



8 La vieille calculatrice

Comme $3 \times 555 + 55 < 2012 < 4 \times 555$, cherchons 4 nombres à 3 chiffres de somme 2012. Parmi eux $0 \leqslant a \leqslant 4$ (resp. b, c, d) ont 5 comme chiffre des unités (resp. dizaines, centaines, milliers). La congruence $5a + 3\,(4 - a) \equiv 2 \pmod{10}$ entraîne $a = 0$. La congruence $1 + 5b + 3\,(4 - b) \equiv 1 \pmod{10}$ entraîne $b = 4$. La congruence $2 + 5c + 3\,(4 - c) \equiv 0 \pmod{10}$ entraîne $c = 3$.

Alors $553 + 553 + 553 + 353 = 2012$ nécessite d'appuyer sur 16 touches.

9 Autoréférence

Dans le cadre, nous comptons 15 nombres : les douze nombres de 1 à 12, les deux nombres manquants et le 5 final. Parmi eux, 4 sont des multiples de 5 : 5, 10, 15 et 5. Mais le deuxième nombre manquant peut l'être aussi : la phrase reste vraie avec 5 multiples de 5.

Il y a donc 2 solutions 15/4 et 15/5.

10 Devine-symbole

En notant c, t et r les symboles carré, triangle et rond, nous avons les 3 relations $2c + t = 19$ (1), $c + t + r = 15$ (2) et $2t + r = 10$ (3). Il n'est pas nécessaire d'expliciter $c = 8$, $t = 3$ et $r = 4$, en utilisant les bonnes combinaisons linéaires.

En effet, 2(2)-(1) et 2(2)-(3) donnent $2r + t = 11$ et $2c + r = 20$.

11 Le "E" magique

Notons S la somme commune. La colonne de 5 cases vaut au moins $1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16$. Les 3 lignes totalisent au plus $3 + \cdots + 10 = 52$. D'où $S = 16$ ou 17. Remarquons qu'à toute solution correspond une autre en permutant les deux lignes formées d'une seule case.

Si $S = 16$, alors la colonne contient les éléments $\{1, 2, 3, 4, 6\}$ et il reste à placer 7, 8, 9 et 10. La deuxième ligne impose 6-10, la première ligne 1-7-8 et la troisième ligne 2-5-9.

1	7	8
3		
6	10	
4		
2	5	9

Si $S = 17$, alors 5 étant déjà placé, la colonne contient les éléments $\{1, 2, 3, 4, 7\}$ et il reste à placer 6, 8, 9 et 10. La deuxième ligne impose 7-10. Comme $6 + 8 = 5 + 9$, la première ligne est 2-6-9 et la troisième ligne 4-5-8.

2	6	9
1		
7	10	
3		
4	5	8

Il y a donc 4 solutions.

12 Des traits et c'est tout

En assimilant le symbole au nombre de traits, nous obtenons la représentation 3-adique des entiers.

entier	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
3-adique	1	2	3	11	12	13	21	22	23	31	32	33	111	...

Pour $k \geqslant 1$, la suite $u_k = \sum_{i=0}^{k-1} 3^i = \frac{3^k-1}{2}$ indique l'entier s'écrivant avec k symboles 1 : $u_1 = 1$, $u_2 = 4$, $u_3 = 13$, $u_4 = 40$, ...
3^k entiers s'écrivent avec exactement k symboles : ce sont donc les entiers de u_k à $3u_k = u_{k+1} - 1$. Chacun des 3 symboles est uniformément réparti au sein des unités (idem pour les dizaines, centaines, etc). Ils nécessitent donc $\frac{3^k}{3}(1+2+3)\,k = 2k \times 3^k$ traits.
Après avoir écrit 39 (333), $6 + 36 + 162 = 204$ traits auront été utilisés.
Les 3^2 entiers de 40 à 48 commençant par 11 suivi de 2 symboles nécessitent $2 \times 3^2 + 36 = 54$ traits.
Les 3^2 entiers de 49 à 57 commençant par 12 suivi de 2 symboles nécessitent $3 \times 3^2 + 36 = 63$ traits. Ainsi de 1 à 57 (1233), Charles aurait écrit $204 + 54 + 63 = 321$ traits.

Après le $321 - 9 = 312$ème trait, Charles a entièrement écrit 56.

13 Somme des chiffres

La preuve par neuf montre que la somme des chiffres du nombre $N + P$ est congrue à $4 + 5$ modulo 9. Comme elle ne peut être nulle, elle vaut au moins 9.

Les exemples suivants, construits en propageant une retenue avec des sommes partielles donnant 9, montrent que ce minimum est atteint.

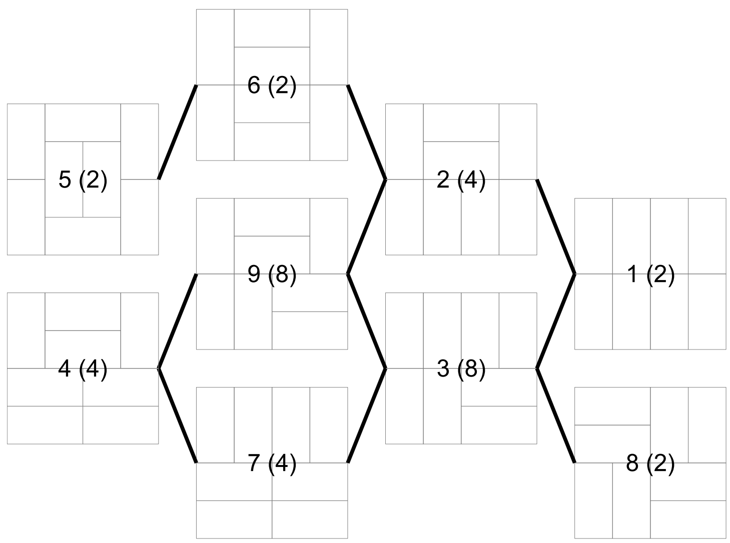
$$92\underbrace{6\ldots6}_{332}9 + 7\underbrace{3\ldots3}_{332}9 = 1\underbrace{0\ldots0}_{334}8$$

$$2\underbrace{6\ldots6}_{335} + 6\underbrace{3\ldots3}_{334}4 = 9\underbrace{0\ldots0}_{335}$$

$$89\underbrace{9\ldots9}_{82}\underbrace{5\ldots5}_{252}6+\underbrace{4\ldots4}_{253}=9\underbrace{0\ldots0}_{335}$$

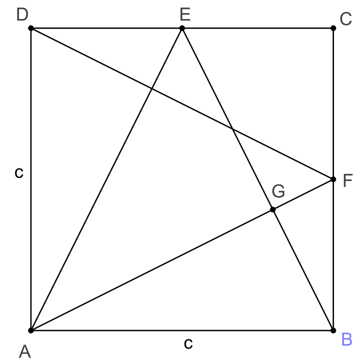
14 Tourne-dominos

Il y a 36 façons de couvrir un carré 4x4 avec des dominos 2x1. Modulo les symétries, il y a 9 classes d'équivalence (le numéro de la classe est suivi du nombre d'éléments entre parenthèses) et le graphe suivant montre qu'il est possible en au plus 3 coups de passer de n'importe quelle configuration à une autre où tous les dominos sont orientés dans le même sens (classe 1). Sachant qu'il faut 4 coups pour inverser le sens des dominos (passer d'un élément de la classe 1 à l'autre), cela donne un maximum théorique de $3+4+3=10$ coups.



Nous vérifions alors que 10 coups sont nécessaires pour passer d'un élément de la classe 5 à l'autre.

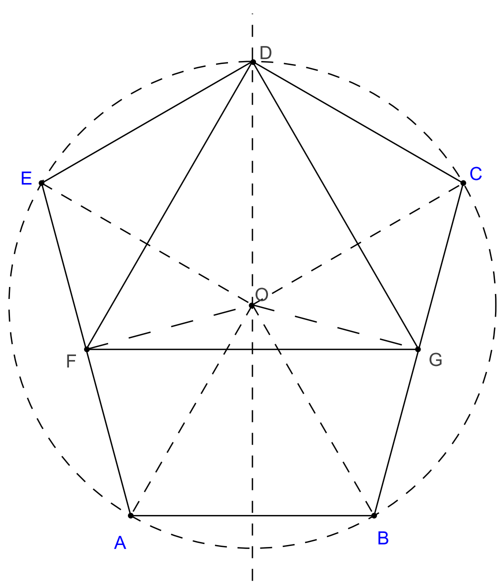
15 Devine-surface



Notons c le côté du carré et posons $k = \frac{c\sqrt{5}}{10}$. D'après le théorème de Pythagore, $AE^2 = AD^2 + DE^2$, d'où $AE = 5k = BE = AF$. Nous vérifions aisément que les droites (AF) et (BE) sont perpendiculaires. Des relations $AB^2 = AG \times AF$ et $BG \times AF = AB \times BF$, nous déduisons $AG = 4k$ et $GE = BE - BG = 3k$.

Ainsi k est un entier et $c^2 = 20k^2$ vaut au minimum 20.

16 Le casque de chevalier



(DO) est un axe de symétrie. Ayant leurs 3 côtés égaux, les triangles ABO et DEO sont équilatéraux. Ainsi l'angle $\widehat{EOA}$ est droit et le triangle AEO est rectangle en O. Nous avons alors $EF = FO$, F étant le milieu de l'hypothénuse

$[AE]$. Ainsi (DF) est la médiatrice de $[EO]$ mais aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{EDO}$, d'où $\widehat{EDF} = \widehat{FDO}$. Le triangle DFG est alors équilatéral car par symétrie, il est isocèle en D avec un angle $\widehat{FDG} = \widehat{EDO}$.

Nous avons $FG^2 = OF^2 + OG^2 - 2 \times OF \times OG \cos \widehat{FOG}$ (théorème d'Al-Kashi dans le triangle OFG). Or $OF = OG = \frac{25\sqrt{2}}{2}$ et $\widehat{FOG} = \pi - \frac{\pi}{6}$, d'où $FG^2 = 25^2 \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

L'aire du triangle DFG vaut alors $\frac{FG^2\sqrt{3}}{4} = \frac{25^2\left(3+2\sqrt{3}\right)}{8} \approx 25^2 \times \frac{8\times 101}{1000} \approx 505$.

17 La suite de l'année

Evaluons $s_n = |S_n|$ où S_n est l'ensemble des séquences ternaires de longueur n, ne contenant pas 012 et ne se terminant pas par 01.
Nous avons $s_0 = 1$ (par convention, la séquence vide), $s_1 = 3$ et $s_2 = 8$.
Montrons que $s_n = 3s_{n-1} - s_{n-3}$ (*) pour tout entier $n \geqslant 3$. En effet, tout élément de S_n s'écrit aX, où $a = 0$, 1 ou 2 et X est un élément de S_{n-1}, à l'exception de $a = 0$ et $X = 12Y$, où Y un élément de S_{n-3}.
Pour tout entier $n \geqslant 0$, considérons la suite d'évènements deux à deux disjoints E_n "après un élément de S_n, 2012 apparaît pour la première fois".

Il est clair que $p\left(E_n\right) = \frac{s_n}{3^{n+4}}$ et la probabilité cherchée vaut alors $p = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} p\left(E_i\right)$.

A l'aide de (*), nous avons $\sum\limits_{i=3}^{+\infty} \frac{s_i}{3^i} = \sum\limits_{i=2}^{+\infty} \frac{s_i}{3^i} - \frac{1}{3^3} s$ où $s = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \frac{s_i}{3^i}$.

D'où $s = 3s_2$ et finalement $p = \frac{s_2}{3^3} = \frac{8}{27}$.

18 Le jeu de Joseph

En espérant que le nombre éliminé après 2012 ne soit pas trop grand, examinons la structure des nombres éliminés à chaque tour.

tour	éliminés (mod 3^{tour})	restent	dernier éliminé
1	1	2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 14...	2011
2	3, 8	2, 5, 6, 9, 11, 14...	2010
3	5, 11, 18, 24	2, 6, 9, 14...	2009
4	6, 15, 27, 36, 47, 56, 68, 77	2, 9, 14...	2012

Après l'élimination de 2012, on saute 2 puis 9 et le prochain éliminé est 14.
Remarque : Il s'agit d'un problème de Joseph d'ordre 3. Voir la suite A054995. Malgré la présence des puissances de 3, il n'y aurait pas de formule simple contrairement au problème d'ordre 2.