Demi-finale 21 mars 2009

Daniel Collignon

30 janvier 2010

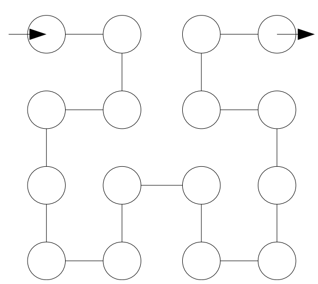
1 L'addition de l'année

Aucune difficulté pour reconstituer cette addition, puisque dans chaque colonne il ne manque qu'un seul chiffre (il faut juste faire bien attention aux éventuelles retenues).

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 8 & 3 \\ + & & 7 & 2 & 6 \\ \hline = & 2 & 0 & 0 & 9 \end{array}$$

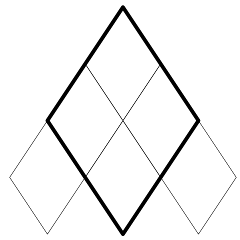
2 Labyrinthe

Remarquons la symétrie du labyrinthe, y compris vis-à-vis du départ et de l'arrivée. Exception faite de ces deux salles, le trajet s'impose naturellement dans toute salle avec exactement deux couloirs. Puisque Mathias ne passe pas deux fois dans la même salle, cela permet également d'éliminer les couloirs inutilisés. De proche en proche, nous arrivons assez rapidement à l'unique trajet.



3 Les losanges

La figure étant invariante par rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$, nous nous intéressons aux seuls losanges orientés verticalement : nous en dénombrons 6 petits et 1 grand.



Ainsi il y aura en tout $3\,(6+1) = 21$ losanges.

4 Le calendrier de Mathilde

Le tableau suivant résume la situation.

jour	description
n	$1n$
$1n$ où $n \neq 1$	$111n$
11	21
$2n$ où $n \neq 2$	$121n$
22	22
30	1310
31	1311

Seul 22 présente une auto-description.

5 Partage littéral

Si deux cases contenant la même lettre sont voisines, alors il y a nécessairement une cloison. En raisonnant sur la partie contenant les lettres B et C de la première ligne, nous voyons qu'elle contient également le A de droite, et le reste du partage en découle aisément.

A	B	C	A	E
D	B	C	E	D
B	A	E	D	C
C	E	B	A	D

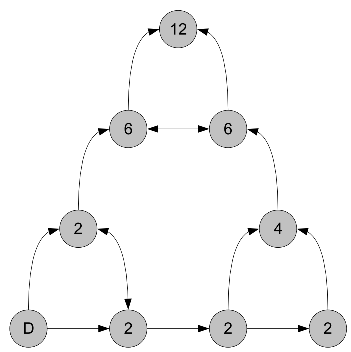
6 Les quatre cartes

L'implication “si une carte porte un 1 sur une face, alors elle porte un A sur l'autre face” est équivalente à la contraposition “si une carte ne porte pas un A sur une face, alors elle ne porte pas un 1 sur l'autre face”.

Ainsi pour que Mathilde puisse vérifier la véracité de l'affirmation de Mathias, il est nécessaire de retourner :
- la carte 1 pour voir s'il y a bien un A derrière
- la carte Z pour voir s'il n'y a pas de 1 derrière

7 Circuit sur cubes

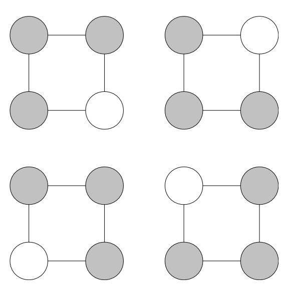
Le graphe orienté suivant résume les déplacements possibles (chaque noeud porte le nombre de trajets distincts depuis le point de départ D, obtenu de proche en proche par sommation des nombres des noeuds antécédents, en faisant attention aux arêtes à double sens).



Il y a donc 12 façons pour aller de D à A.

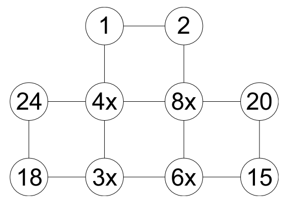
8 Les seize disques

En considérant 4 petits carrés disjoints, le maximum théorique est à $16-4=12$. Le dessin suivant (et son symétrique) montre que ce maximum est atteint.



9 Produits en croix

Tous les nombres manquants s'expriment à l'aide d'une seule inconnue, mais pour éviter des fractions (l'énoncé aurait pu être plus explicite en utilisant le mot entier plutôt que nombre), cela nécessite de multiplier notre inconnue par le ppmc des dénominateurs, ce qui donne le diagramme suivant.



Nous avons $8x < 24$ et $3x \geqslant 3$, d'où $x = 1$ ou 2. Les deux cas fournissent chacun une solution (nous vérifions qu'aucun nombre n'apparaît deux fois).

10 Les trois nombres

		a	b	c
+		d	e	f
+		g	h	i
=	1	5	7	5

Puisque $6 = 1 + 2 + 3 < c + f + i < 7 + 8 + 9 = 24$, alors $c + f + i = 15$.
Si $1 + b + e + h = 7$, alors $a + d + g = 15$, mais $a + \ldots + i = 36 \neq 1 + \ldots + 9$.
D'où $1 + b + e + h = 17$ et $1 + a + d + g = 15$. Nous pouvons alors reconstituer l'addition de Mathias.

		a	c	b
+		d	f	e
+		g	i	h
=	1	5	6	6

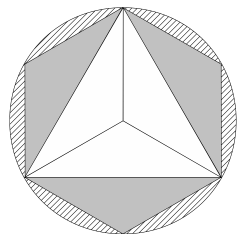
Exemple : $(a, b, c, d, e, f, g, h, i) = (1, 2, 3, 4, 6, 5, 9, 8, 7)$

11 Le tournoi d'échecs

S'il y a $n \geqslant 2$ joueurs, chacun aura disputé $n-1$ parties et il y aura donc au total $\frac{n(n-1)}{2}$ parties jouées. Chaque partie génère 1 victoire et 1 défaite. Le nombre de défaites vaut également $3 \times (n - 1 - 4) + 3 \times 7 + (n - 6) \times 1 = 4n$. D'où la relation $4n = \frac{n(n-1)}{2}$ fournissant la valeur $n = 9$.

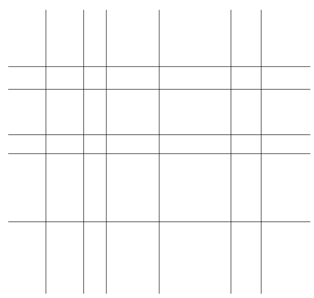
12 Coloriage du disque

Un bon dessin vaut mieux qu'un long discours...



Les points régulièrement espacés sur le cercle forment un hexagone régulier dont la longueur de chaque côté est égale au rayon du cercle circonscrit. Sur le dessin de l'énoncé, la zone en gris a la même aire que la zone en blanc, chacune valant donc la moitié de l'aire du disque, soit $\frac{314}{2} = 157$.

13 Quadrillage du plan



Quitte à échanger les directions (ou tourner le plan d'un quart de tour), considérons d droites dans une direction et $p \geqslant d$ dans la direction perpendiculaire (illustration ci-dessus avec 5 et 6 droites). Elles délimitent $(d-1)(p-1)$ rectangles et $(d+1)(p+1)-(d-1)(p-1) = 2(d+p)$ régions ouvertes (attention aux intervalles). Nous en déduisons la relation $(d-1)(p-1) = 4(d+p)$ que nous réécrivons en $(d-5)(p-5) = 24$. Le tableau suivant résume les 4 cas.

d	6	7	8	9
p	29	17	13	11

Mathias a donc tracé $d+p = 20, 21, 24$ ou 35 droites.

14 Les jetons

Notons $2 \leqslant b \leqslant 20$ le nombre de boîtes utilisées, j le nombre de jetons par boîte et s la somme des numéros des jetons dans chacune des boîtes.
Le nombre total de jetons vaut $bj = 20$ et la somme totale des jetons vaut $bs = 1 + \ldots + 20 = 210$. D'où $\frac{s}{j} = \frac{21}{2}$ et il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que $s = 21k$ et $j = 2k$ et par conséquent $b = \frac{10}{k}$.
Cas $k = 1$: pour $1 \leqslant i \leqslant 10$, la boîte i contient les jetons i et $21 - i$.

Cas $k = 2$: pour $1 \leqslant i \leqslant 5$, la boîte i réunit le contenu des boîtes i et $i+5$ de l'exemple précédent.
Cas $k = 5$: pour $1 \leqslant i \leqslant 2$, la boîte i réunit le contenu des boîtes de même parité que i dans l'exemple initial.
Il y a donc 3 solutions : 2, 5 et 10 boîtes.

15 Le diamant

Notons $m < n$ les masses du petit et du gros morceau et k le ratio constant de la valeur d'un diamant par le carré de sa masse. Nous avons les relations suivantes : $11200 = k\left(m+n\right)^2$ et $11200 - 4200 = 7000 = k\left(m^2+n^2\right)$. De plus, $\left(n-m\right)^2 = 2\left(m^2+n^2\right) - \left(m+n\right)^2 \Rightarrow k\left(n-m\right)^2 = 14000 - 11200 = 2800$.
D'où $m + n = 40\sqrt{\frac{7}{k}}$ et $n - m = 20\sqrt{\frac{7}{k}}$. Donc $n = 30\sqrt{\frac{7}{k}}$ et $m = 10\sqrt{\frac{7}{k}}$.
Par conséquent, le rapport $\frac{m}{n}$ vaut $\frac{1}{3}$.
Remarque : si les nombres en jeu étaient entiers, alors il existerait un entier $j \geqslant 1$ tel que $k = 7j^2$ et $j \mid 10$, et nous aurions 4 cas illustrant ce rapport.

j	1	2	5	10
k	7	28	175	700
m	10	5	2	1
n	30	15	6	3

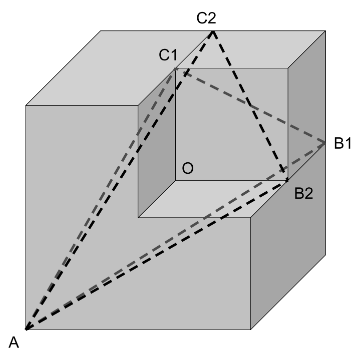
16 Le cadeau

Notons $1 \leqslant a \leqslant b \leqslant c$ les dimensions de la boîte en forme de parallélépipède rectangle. La longueur de la ficelle vaut $4\left(a+b+c\right)$, la surface de la boîte $2\left(ab+bc+ca\right)$, d'où la relation $4\left(a+b+c\right) = ab+bc+ca$, que nous réécrivons en $bc - \left(b+c\right)\left(4-a\right) = 4a$. Or $3a \leqslant a+b+c$ et $ab+bc+ca \leqslant 3bc$, d'où $4a \leqslant bc$, ce qui entraîne $a \leqslant 4$.
Réécrivons la relation sous la forme $\left(b+a-4\right)\left(c+a-4\right) = \left(a-2\right)^2 + 12$.
Cas $a = 1$: $\left(b-3\right)\left(c-3\right) = 13$, d'où $\left(a,b,c\right) = \left(1,4,16\right)$.
Cas $a = 2$: $\left(b-2\right)\left(c-2\right) = 12$, d'où $\left(a,b,c\right) = \left(2,3,14\right), \left(2,4,8\right)$ ou $\left(2,5,7\right)$.
Cas $a = 3$: $\left(b-1\right)\left(c-1\right) = 13$ n'admet pas de solution avec $a \leqslant b \leqslant c$
Cas $a = 4$: $bc = 16$, d'où $\left(a,b,c\right) = \left(4,4,4\right)$.

17 Un triangle dans un cube

Fixons le point A un sommet du cube et considérons un repère orthonormé tel que l'origine coïncide avec le centre du cube, les axes soient parallèles aux faces du cube et $A = \left(-4,-4,-4\right)$.
Un point est situé à la surface du cube signifie que l'une des coordonnées vaut ± 4 tandis que les deux autres sont comprises entre -4 et 4.
Choisissons deux points $B = \left(a,b,c\right)$ et $C = \left(x,y,z\right)$ situés à la surface du cube, et considérons le triangle ABC d'aire S et dont le centre de gravité est l'origine.

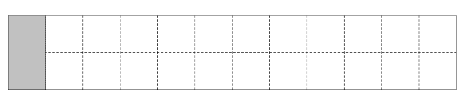
D'où $B = (4 - x, 4 - y, 4 - z)$ et de plus, $0 \leqslant x, y, z \leqslant 4$, toutes les coordonnées étant comprises entre -4 et 4.
Calculons $S = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = 6\sqrt{(z-y)^2 + (x-z)^2 + (y-x)^2}$. Cette expression étant symétrique par rapport à x, y et z, nous pouvons par exemple supposer que $0 = x \leqslant y \leqslant z = 4$ (B et C sont situés à la surface du cube). Alors $S = 6\sqrt{24 + 2(y-2)^2}$. Cette expression sera clairement maximale pour $y = 0$ ou 4, et $S_{max} = 24\sqrt{2} \approx 33,94$ avec les données de l'énoncé.



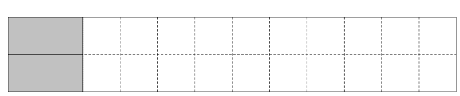
18 Dans le sens de la largeur

Pour $n \geqslant 1$, considérons les suites g_n, le nombre de dominos verticaux parmi les f_n couvertures possibles du rectangle $2 \times n$, et $h_n = nf_n - g_n$, le nombre de dominos horizontaux. Il s'agit d'évaluer le rapport $\rho_n = \frac{g_n}{nf_n}$ pour $n = 2009$.
Nous avons $f_1 = g_1 = 1, h_1 = 0$ et $f_2 = g_2 = h_2 = 2$.
Pour $n \geqslant 3$, le rectangle $2 \times n$ est couvert à gauche :

– soit par 1 domino vertical et un rectangle $2 \times (n-1)$ reste à couvrir



– soit par 2 dominos horizontaux et un rectangle $2 \times (n-2)$ reste à couvrir



D'où les relations de récurrence $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, g_n = f_{n-1} + g_{n-1} + g_{n-2}$ et $h_n = h_{n-1} + 2f_{n-2} + h_{n-2}$.
Remarquons que $i_n = h_n - 2g_{n-1} = i_{n-1} + i_{n-2}$ avec $i_1 = i_2 = 0$, donc $i_n = 0$ pour tout $n \geqslant 1$. D'où une autre relation de récurrence $nf_n = g_n + 2g_{n-1}$.
En combinant les deux relations liant g_n et f_n, nous parvenons à l'expression $5g_n = nf_n + 2(n+1)f_{n-1}$, d'où $\rho_n = \frac{1}{5} + \frac{2(n+1)f_{n-1}}{5nf_n}$.

Donnons une formule explicite de f_n (suite de Fibonacci) : l'équation caractéristique $x^2 - x - 1 = 0$ de discriminant 5 a pour racines $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $-\frac{1}{\phi} = 1 - \phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Nous cherchons f_n sous la forme $a\phi^n + b\left(1-\phi\right)^n$. A l'aide de $f_1 = 1$ et $f_2 = 2$, nous en déduisons que $a = \frac{\phi}{\sqrt{5}}$ et $b = -\frac{1-\phi}{\sqrt{5}}$. Nous retrouvons la formule de Binet, à savoir $f_n = \frac{\phi^{n+1}-(1-\phi)^{n+1}}{\sqrt{5}}$.
Ainsi $\frac{f_{n-1}}{f_n} = \frac{\phi^{2n+1}-(-1)^n\phi}{\phi^{2n+2}+(-1)^n} = \frac{1}{\phi}\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\phi^{2n}}\right)\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\phi^{2n+2}+(-1)^n}\right)$
De $\phi^2 = \phi + 1 > 2$, découle $\frac{1}{\phi^{20}} < \frac{1}{2^{10}} < \frac{1}{10^3}$ et donc $\frac{f_{n-1}}{f_n} \approx \frac{1}{\phi}$ dès que n est grand.
Nous avons alors $\rho_n \approx \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{5}-1}{5n}$. Cette approximation étant d'autant plus vraie que n est très grand. Pour $n = 2009$, le terme restant est strictement inférieur à $\frac{2}{10^4}$ et $\frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0,4472$ avec les données de l'énoncé. La proportion cherchée est donc de 44,7 %.