

Prendre ou diviser pour gagner

Christian et Philippe jouent au jeu suivant. Ils disposent de trois piles de pions comptant respectivement 2 pions, 5 pions et 7 pions (2,5,7).

Un coup consiste :

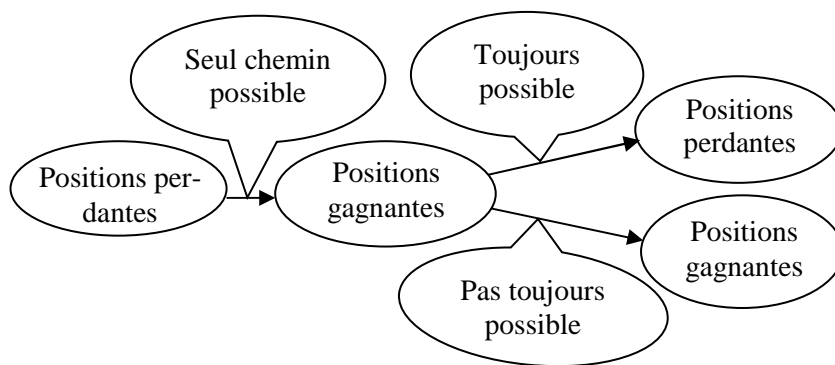
- soit à ôter un ou plusieurs pions d'une pile (on peut éventuellement ôter une pile complète);
- soit à diviser une pile contenant au moins deux pions en deux piles pas forcément égales, sans retirer aucun pion.

Le joueur qui prend le dernier pion gagne. Ils jouent à tour de rôle et c'est Philippe qui commence. **Quel doit être son premier coup pour être sûr de gagner quel que soit le jeu de Christian ?**

La configuration initiale est décrite par (2,5,7). La réponse sera donnée par la configuration obtenue après le premier coup, sous la forme (a,b) ou (a,b,c) ou (a,b,c,d) où a, b, c et d donnent le nombre de pions des piles.

Solutions

Nous avons affaire à un jeu de Nim (jeu qui se joue à deux et qui conduit à une fin certaine). Ceux qui connaissent ce type de jeu savent qu'il faut toujours chercher les positions perdantes (P). Par convention, une position est dite perdante si celui qui doit jouer dans cette position ne peut que perdre. De même, une position est dite gagnante (G) si celui qui doit jouer dans cette position peut gagner s'il joue correctement. Dans les jeux de Nim, il est impossible de passer en un coup d'une position perdante à une autre position perdante (une position perdante est toujours suivie d'une position gagnante).



Une position gagnante peut toujours conduire en un coup à une position perdante (il peut y en avoir plusieurs) et souvent aussi à une position gagnante. Celui qui est dans une position gagnante doit amener son adversaire dans une position perdante. Celui qui est dans une position perdante n'a aucune chance de gagner si son adversaire joue bien. Il ne peut qu'espérer une erreur de son adversaire pour renverser la situation.

Au départ, dans un jeu de Nim, on commence quasiment toujours par chercher des positions perdantes par tâtonnement. Ensuite, parfois, on découvre certaines règles.

Commençons donc par chercher des positions perdantes de notre jeu en recherchant celles qui comportent peu de pions. On dit que l'on va du simple au compliqué.

Le premier joueur qui ne peut plus jouer a perdu. Donc, la position (0) est perdante.

Les positions (1,1), (1,1,1,1), (1,1,1,1,1,1), (1,1,1,1,1,1,1,1), etc. sont perdantes.

Il est facile de vérifier que les positions (2,2) et (1,1,2,2) sont perdantes, de même que les positions (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), ... ainsi que (1,1,2,2), (1,1,1,2,2), (1,1,1,1,2,2), ...

Rappelons qu'une position perdante ne peut jamais conduire à une autre position perdante en un seul coup et que, à partir d'une position perdante, on peut toujours aller à une autre position perdante en deux coups. Par exemple, la position perdante (3,3) ne peut aller à aucune position perdante en un coup. Selon le coup joué suivant, elle ira à la position (0), (1,1), (2,2) ou (1,1,2,2).

La position perdante (1,1,2,2) peut conduire aux positions suivantes (1,2,2), (1,1,2), (1,1,1,2) et (1,1,1,1,2), toutes gagnantes (je rappelle qu'elles sont gagnantes pour celui qui va jouer alors

qu'il se trouve devant ces positions). Chacune d'elles peut forcément aller vers une position perdante. Ici, (1,2,2) doit aller en (2,2), (1,1,2) en (1,1), (1,1,1,2) en (1,1,1,1) et (1,1,1,1,2) en (1,1,1,1).

On va ainsi aller pas à pas à la recherche des positions perdantes. C'est souvent long et fastidieux. Si une position conduit en un coup à une position perdante, c'est qu'elle est gagnante. On pourrait croire que la position (1,2,3) est perdante car si le prochain coup donne (2,3), le coup suivant peut aller à (2,2) qui est une position perdante. C'est faux car le coup (2,3) a été mal joué. Il fallait faire (1,1,2,2) qui est une position perdante. Donc (1,2,3) est une position gagnante. Souvent, il faut noter les positions gagnantes afin de ne plus les tester par la suite.

Récapitulons les positions perdantes trouvées jusqu'ici (parfois, on « sent » la suite) :

a) (1,1), (1,1,1,1), (1,1,1,1,1,1), (1,1,1,1,1,1,1,1), etc.

b) (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), etc.

c) (1,1,2,2), (1,1,1,1,2,2), (1,1,1,1,1,1,2,2), etc.

En voici d'autres, dans l'ordre où je les ai trouvées :

d) (1,1,3,3), (1,1,1,1,3,3), (1,1,1,1,1,1,3,3), etc.

e) (1,1,4,4), (1,1,1,1,4,4), (1,1,1,1,1,1,4,4), etc.

f) (2,2,2,2), (2,2,2,2,2,2), (2,2,2,2,2,2,2,2), etc.

Certaines positions sont peut-être irréalisables avec les piles de départ de notre problème. Elles sont quand même données pour l'intérêt d'un jeu dont les règles sont identiques mais avec des piles différentes au départ.

L'observation des positions perdantes trouvées jusqu'ici et vérifiées par de nombreux essais nous permet d'établir la règle suivante : **une position est perdante lorsque toutes les piles sont en double exemplaires**. Cette règle est très pratique et nous permet une belle avancée dans la recherche des positions perdantes.

N'oublions pas que la position de départ est (2,5,7). La règle que nous venons de trouver nous permet d'obtenir une solution : en séparant la pile de 7 pions en deux piles de 2 et 5 pions, on obtient la position (2,2,5,5).

Il nous faut partir à la recherche d'éventuelles autres positions perdantes pour voir s'il y a d'autres solutions possibles.

Les positions suivantes sont perdantes :

g) (1,2,4), (1,3,5), (1,6,8), (1,7,9), (1,10,12), (1,11,13), etc.

h) (2,3,6), (2,5,8), (2,7,10), (2,9,12), (2,11,14), (2,13,16), etc.

On peut vérifier la règle suivante : **une position est perdante lorsqu'elle est la « somme » de plusieurs positions perdantes**.

Exemples :

- (3,3) + (1,3,5) = (1,3,3,3,5).
- (1,2,4) + (2,3,6) = (1,2,2,3,4,6).

Arrêtons de chercher des positions perdantes et reprenons notre jeu. Chacun peut vérifier que si Philippe se contente d'ôter des pièces à son premier coup, il met toujours Christian dans une position qui lui donne la possibilité de placer Philippe dans une position perdante (P). Les positions de Christian sont donc gagnantes. Exemples :

- (2,5,7) → (1,5,7) → (1,3,5) (P).
- (2,5,7) → (5,7) → (5,5) (P).
- (2,5,7) → (2,4,7) → (1,2,4) (P).
- (2,5,7) → (2,3,7) → (2,3,6) (P).

Etc.

Il nous faut maintenant considérer tous les cas où Philippe divise une pile...

- $(2,5,7) \rightarrow (1,1,5,7) \rightarrow (1,1,5,5)$ (P).
- $(2,5,7) \rightarrow (1,2,4,7) \rightarrow (1,2,4)$ (P).
- $(2,5,7) \rightarrow (2,2,3,7) \rightarrow (2,2,3,3)$ (P).
- $(2,5,7) \rightarrow (1,2,5,6)$. La position $(1,2,5,6)$ ne permet pas d'aller dans une des positions perdantes vues jusqu'ici. Il nous faut donc l'étudier en détail. Si c'est toujours le cas, alors c'est une position perdante. Une nouvelle fois, il nous faut faire une étude longue et minutieuse. Regardons quelques cas :
- $(2,5,7) \rightarrow (1,2,5,6) \rightarrow (1,1,2,5,5) \rightarrow (1,1,5,5)$ (P). $(1,1,5,5)$ est perdante, donc $(1,1,2,5,5)$ est gagnante. On ne peut rien déduire de $(1,2,5,6)$ car peut-être que le coup a été mal joué. Il nous faut tester tous les autres coups :
- $(2,5,7) \rightarrow (1,2,5,6) \rightarrow (1,2,2,4,5) \rightarrow (1,2,2,2,4)$ (P), « somme » de $(1,2,4)$ et $(2,2)$. On peut faire les mêmes remarques qu'au paragraphe précédent.
- $(2,5,7) \rightarrow (1,2,5,6) \rightarrow (1,2,3,3,5) \rightarrow (1,2,3,3,4)$ (P), « somme » de $(1,2,4)$ et $(3,3)$. Mêmes remarques qu'au paragraphe précédent. L'étude systématique de la position $(1,2,5,6)$ nous montre que c'est une position perdante car la position suivante est toujours gagnante. Nous avons alors une 2ème solution à notre problème : $(1,2,5,6)$.

Il nous faut continuer l'étude des cas où Philippe divise une pile. Bravo pour ceux qui ont le courage de le faire. Ils constateront alors que la position $(2,3,4,5)$ est perdante. C'est la 3ème et dernière solution de notre jeu.

Nous avons donc 3 solutions : $(2,2,5,5)$, $(1,2,5,6)$ et $(2,3,4,5)$.

Remarques :

- Pour résoudre cet exercice, j'ai commencé par rechercher un certain nombre de positions perdantes en espérant y découvrir quelques règles générales. Ensuite, je suis parti de la position de départ du jeu pour faire une étude systématique des premiers coups.
- L'étude des jeux de Nim à laquelle j'ai consacré un thème dans mon livre « Les Clefs des Enigmes Mathématiques » est passionnante, complexe et étonnamment variée.
- Étonnamment, nous aurions eu les mêmes solutions si dans notre exercice, nous aurions eu « Celui qui prend le dernier pion perd » au lieu de « Celui qui prend le dernier pion gagne ». Dans ce cas, seules les positions perdantes trouvées en a seraient différentes et devraient être remplacées par (1) , $(1,1,1)$, $(1,1,1,1,1)$, $(1,1,1,1,1,1,1)$, etc. et la position (0) deviendrait gagnante. C'est une des particularités des jeux de Nim. Pour les joueurs, cela implique quelques modifications de tactique en fin de partie.
- Sur mon site (<http://www.jeuxmath.ch/>), dans la rubrique C, l'exercice 25 nommé « Coincez la reine » est un jeu de Nim. C'est l'un des plus étonnants exercices que j'ai eu le plaisir de découvrir. Je vous le conseille vivement.