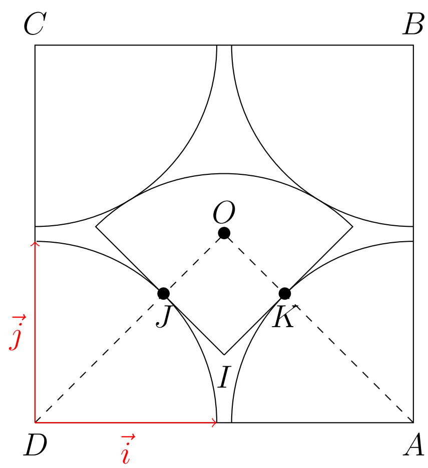
18 - Cinq quarts de pizza

(1/4 de finale 2013)

Une résolution analytique :



Les points J et K désignent des contacts tangentiels entre un arc de cercle et un segment. L'hypothèse faite sur la symétrie de la figure et ses contacts implique que les droites (DJ) et (AK) se coupent en un point O tel que le triangle AOD soit isocèle rectangle en O. Par conséquent les coordonnées du point J sont $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ dans le repère orthogonal $(D; \vec{i}, \vec{j})$ où les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont pour longueur 16 cm. Nous désignons par a l'abscisse inconnue du point A dans ce repère.

L'hypothèse de symétrie implique que le point I a pour coordonnées $(a/2, y_I)$ et puisque I appartient à la tangente au quart de cercle inférieur gauche d'équation $y = -x + \sqrt{2}$, s'ensuit que $y_I = \sqrt{2} - a/2$. Nous en déduisons que

$$\overrightarrow{IC} = -\frac{a}{2}\vec{i} + (\frac{3a}{2} - \sqrt{2})\vec{j}.$$

Le quart de cercle supérieur gauche étant tangent à celui occupant le milieu de la boîte, nous avons $IC^2 = (2 \times 16)^2$ si bien que

$$4 = IC^2/16^2 = \|\overrightarrow{IC}\|^2/16^2 = \frac{5}{2}a^2 - 3\sqrt{2}a + 2.$$

Ainsi a est la solution positive de l'équation $\frac{5}{2}a^2 - 3\sqrt{2}a - 2 = 0$, c'est-à-dire

$$a = \frac{\sqrt{2}(3 + \sqrt{19})}{5}.$$

Par conséquent, l'aire du fond de la boîte exprimée en cm^2 est

$$(16a)^2 = 1024\frac{14 + 3\sqrt{19}}{25} = 4096\frac{14 + 3\sqrt{19}}{100} \approx 40,96 \times (14 + 3 \times 4,359) \approx 1109,$$

les deux approximations se basant sur les indications de l'énoncé. $\square$