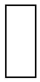
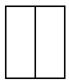
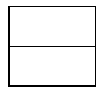
Résolution problème no 18 des demi-finales 2009

Soit N_x le nombre de combinaisons possibles de placer x dominos de 1cm sur 2cm dans un rectangle de longueur x cm et de largeur 2cm.

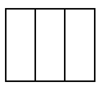
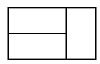
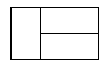
On a par exemple :

$N_1 = 1$ 

$N_2 = 2$

 ou 

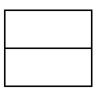
$N_3 = 3$

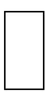
 ou  ou 

$N_4 = 5$

Et d'une manière plus générale $N_x = N_{x-1} + N_{x-2}$ (et voila Fibonacci).

En effet, les différentes combinaisons possibles pour N_x commencent

- soit par  suivi de toutes les combinaisons possibles pour N_{x-2} (cas 1),

- soit par  suivi de toutes les combinaisons possibles pour N_{x-1} (cas 2).

Le nombre de dominos utilisés dans toutes les N_x combinaisons est égal à $x \bullet N_x$.

Soit p le pourcentage de dominos orientés verticalement.

On a donc $p \bullet x \bullet N_x$ dominos orientés verticalement dans toutes les combinaisons possibles.

Le nombre de dominos orientés verticalement peut aussi être calculé à partir des cas 1 et 2 ci-dessus (en utilisant N_{x-1} et N_{x-2}).

Ce qui nous donnerait (on suppose ici que le pourcentage de dominos orientés verticalement est le même dans les cas N_{x-1} et N_{x-2} que pour le cas N_x, pour x suffisamment grand) :

$p \bullet (x-1) \bullet N_{x-1}$ et $p \bullet (x-2) \bullet N_{x-2}$

auquel il faut ajouter un domino orienté verticalement pour chacune des N_{x-1} combinaisons du cas 2 (correspondant au premier domino de la combinaison).

Pour x = 2009 cela nous donne :

$$P \bullet 2009 \bullet N_{2009} = p \bullet 2008 \bullet N_{2008} + p \bullet 2007 \bullet N_{2007} + N_{2008}$$

En remplaçant N_{2009} par $N_{2008} + N_{2007}$ on obtient :

$$P \bullet 2009 \bullet N_{2008} + P \bullet 2009 \bullet N_{2007} = p \bullet 2008 \bullet N_{2008} + p \bullet 2007 \bullet N_{2007} + N_{2008}$$

D'où

$$P \bullet N_{2008} + 2 \bullet P \bullet N_{2007} = N_{2008}$$

$$P = \frac{N_{2008}}{N_{2008} + 2 \bullet N_{2007}}$$

$$1/p = \frac{N_{2008} + 2 \bullet N_{2007}}{N_{2008}} = 1 + 2 \bullet \frac{N_{2007}}{N_{2008}}$$

Or le rapport $\frac{N_{x-1}}{N_x}$ tend vers $(\sqrt{5}-1)/2$ dans le cas d'une suite de Fibonacci.

Donc $1/p = 1 + 2 \bullet 0.618 = 2.236$ et $p = 44.7\%$.

Explication proposée par Jean-Claude Favre. Merci !

La nature ayant – paraît-il – horreur du vide, dans l'espace restant nous glissons un mot

Sur le problème 6 :
Certes un peu rude pour les jeunes concurrents, il justifie pleinement le titre du championnat « … mathématiques **et logiques** ». Des concurrents de catégorie CM ont répondu juste.

Sur le problème 17 :
Le point B est au milieu d'une arête du cube et le point C au milieu d'une face du cube. Le triangle ABC est, heureusement pour le calcul de son aire, un triangle rectangle.