Enoncé : déterminer $\inf_{n\in N}\left(n\left(n\sqrt{2}-E\left(n\sqrt{2}\right)\right)\right)=\inf_{n\in N}\left(n\,\mathrm{frac}\left(n\sqrt{2}\right)\right)=\inf_{n\in N} f\left(n\right)$ avec $f\left(n\right)=n\,\mathrm{frac}\left(n\sqrt{2}\right)=n\,\mathrm{frac}\left(n\left(\sqrt{2}+1\right)\right)$.

Solution résumée : elle est basée sur l'utilisation du développement en fractions continues de $\alpha=1+\sqrt{2}$ (on pourra se référer au problème de polytechnique MP* 99 Math 2) :

$$\alpha=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}$$

- Les réduites successives de α sont

  $$r_0=2 \qquad r_1=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2} \qquad r_2=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}=\frac{12}{5} \qquad r_3=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}=\frac{29}{12} \qquad \cdots\cdots\cdots$$

  La n-ième réduite de α est $r_n=\dfrac{p_n}{q_n}$ définie par

  $$q_0=1 \qquad q_1=2 \qquad q_n=2q_{n-1}+q_{n-2}\in N^*$$
  $$p_0=2=q_1 \qquad p_1=5=q_2 \qquad p_n=2p_{n-1}+p_{n-2}=q_{n+1}\in N^*$$

  On a alors (théorie des suites récurrentes doubles)

  $$q_n=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1}-\left(1-\sqrt{2}\right)^{n+1}\right)$$
  $$p_n=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+2}-\left(1-\sqrt{2}\right)^{n+2}\right)$$

  On établit la formule (théorie des développements en fraction continue)

  $$r_{n+1}-r_n=\left(-1\right)^n\frac{1}{q_nq_{n+1}}$$

  qui permet de prouver que les suites $\left(r_{2n}\right)$ et $\left(r_{2n+1}\right)$ sont adjacentes convergentes de limite α. On a donc pour tout n $\dfrac{p_{2n}}{q_{2n}}<\alpha<\dfrac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}=\dfrac{p_{2n}}{q_{2n}}+\dfrac{1}{q_{2n}q_{2n+1}}$ dont on déduit

  $$0<q_{2n}\alpha-p_{2n}<\frac{1}{q_{2n+1}}<1.$$

  On en déduit que $\mathrm{frac}\left(q_{2n}\sqrt{2}\right)=\mathrm{frac}\left(q_{2n}\left(\sqrt{2}+1\right)\right)=\mathrm{frac}\left(q_{2n}\alpha\right)=q_{2n}\alpha-p_{2n}$.

- On étudie alors la suite $\left(u_n\right)=\left(q_{2n}\left(q_{2n}\alpha-p_{2n}\right)\right)$: on a successivement

  $$q_{2n}\alpha-p_{2n}=\left(1+\sqrt{2}\right)\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n+1}-\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n+1}\right)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n+2}-\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n+2}\right)$$
  $$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n+2}-\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n+1}\right]=-\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n+1}=\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}$$

  dont on déduit

  $$u_n=q_{2n}\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n+1}+\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}\right)\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(1+\left(\sqrt{2}-1\right)^{4n+2}\right)$$

  Par suite $u_n=f\left(q_{2n}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ en décroissant. On a donc a fortiori $\inf_{n\in N} f\left(n\right)\le\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

- On étudie de même $\left(v_n\right)=\left(f\left(q_{2n-1}\right)\right)$. Des calculs analogues conduisent à

$$-1 < \frac{-1}{q_{2n}} < q_{2n-1}\alpha - p_{2n-1} < 0$$

dont on déduit successivement $f\left(q_{2n-1}\right) = q_{2n-1}\left(q_{2n-1}\alpha - p_{2n-1} + 1\right)$ puis

$$f\left(q_{2n-1}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n} - \left(\sqrt{2}-1\right)^{2n}\right) - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(\sqrt{2}-1\right)^{4n} \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\left(1+2n\sqrt{2}\right)-1\right) - \frac{1}{4}$$

$$\geq n - \frac{1}{4} \geq \frac{3}{4} > \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

- Soit alors pour $q \in N^*$ fixé quelconque, $f(q) = q(q\alpha - p)$ avec $p = E(q\alpha)$.
  - Pour $\frac{p}{q} \in \left\{\frac{p_n}{q_n}, n \in N^*\right\}$ on a déjà $f(q) > \frac{1}{2\sqrt{2}}$.
  - Sinon il existe un unique entier *n* tel que $q \in \left]q_n, q_{n+1}\right[$ (car la suite $\left(q_n\right)$ est croissante de limite $+\infty$). On a alors

    $$\left|r - r_n\right| = \left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{\left|pq_n - qp_n\right|}{qq_n} \geq \frac{1}{qq_n} > \frac{1}{q_n q_{n+1}} = \left|r_{n+1} - r_n\right|$$

    Donc $r \notin \left[\left(r_n, r_{n+1}\right)\right]$. Par ailleurs on a

    $$\left|r - r_{n+1}\right| = \left|\frac{p}{q} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| = \frac{\left|pq_{n+1} - qp_{n+1}\right|}{qq_{n+1}} \geq \frac{1}{qq_{n+1}} > \frac{1}{q^2{}_{n+1}}.$$

    Comme $\alpha \in \left]\left(r_n, r_{n+1}\right)\right[$, on en déduit, que

    - ✓ Ou bien *r* est du côté de r_n auquel cas $\left|r - \alpha\right| \geq \left|r - r_n\right| \geq \frac{1}{q_n q_{n+1}} > \frac{1}{q_{n+1}^2}$
    - ✓ Ou bien *r* est du côté de r_{n+1} auquel cas $\left|r - \alpha\right| \geq \left|r - r_{n+1}\right| \geq \frac{1}{q_{n+1}^2}$.

    Finalement dans tous les cas on a $\left|r - \alpha\right| \geq \frac{1}{q_{n+1}^2}$. Mais alors

    $$f(q) = q^2(\alpha - r) = q^2\left|\alpha - r\right| \geq q^2\frac{1}{q_{n+1}^2} > \frac{q_n^2}{q_{n+1}^2} = \frac{1}{r_n^2} \geq \frac{1}{r_1^2} = \frac{4}{9} > \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

  - En résumé pour tout entier *q* on a montré $f(q) > \frac{1}{2\sqrt{2}}$ et donc $\inf_{q \in N^*} f(q) \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}$.
- Comme on disposait déjà de l'autre inégalité il vient

$$\boxed{\inf_{q \in N^*} f(q) = \frac{1}{2\sqrt{2}}}$$