

Enoncé : déterminer $\inf_{n \in \mathbb{N}} \left(n \left(n\sqrt{2} - E \left(n\sqrt{2} \right) \right) \right) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(n \operatorname{frac} \left(n\sqrt{2} \right) \right) = \inf_{n \in \mathbb{N}} f(n)$ avec

$$f(n) = n \operatorname{frac} \left(n\sqrt{2} \right) = n \operatorname{frac} \left(n \left(\sqrt{2} + 1 \right) \right).$$

Solution résumée : elle est basée sur l'utilisation du développement en fractions continues de $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ (on pourra se référer au problème de polytechnique MP* 99 Math 2) :

$$\alpha = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

- Les réduites successives de α sont

$$r_0 = 2 \quad r_1 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \quad r_2 = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{12}{5} \quad r_3 = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = \frac{29}{12} \quad \dots\dots\dots$$

La n-ième réduite de α est $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ définie par

$$\begin{aligned} q_0 &= 1 & q_1 &= 2 & q_n &= 2q_{n-1} + q_{n-2} \in \mathbb{N}^* \\ p_0 &= 2 = q_1 & p_1 &= 5 = q_2 & p_n &= 2p_{n-1} + p_{n-2} = q_{n+1} \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

On a alors (théorie des suites récurrentes doubles)

$$\begin{aligned} q_n &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left((1 + \sqrt{2})^{n+1} - (1 - \sqrt{2})^{n+1} \right) \\ p_n &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left((1 + \sqrt{2})^{n+2} - (1 - \sqrt{2})^{n+2} \right) \end{aligned}$$

On établit la formule (théorie des développements en fraction continue)

$$r_{n+1} - r_n = (-1)^n \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

qui permet de prouver que les suites (r_{2n}) et (r_{2n+1}) sont adjacentes convergentes de limite

α . On a donc pour tout n $\frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \alpha < \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} = \frac{p_{2n}}{q_{2n}} + \frac{1}{q_{2n} q_{2n+1}}$ dont on déduit

$$0 < q_{2n} \alpha - p_{2n} < \frac{1}{q_{2n+1}} < 1.$$

On en déduit que $\operatorname{frac} \left(q_{2n} \sqrt{2} \right) = \operatorname{frac} \left(q_{2n} \left(\sqrt{2} + 1 \right) \right) = \operatorname{frac} \left(q_{2n} \alpha \right) = q_{2n} \alpha - p_{2n}$.

- On étudie alors la suite $(u_n) = (q_{2n} (q_{2n} \alpha - p_{2n}))$: on a successivement

$$\begin{aligned} q_{2n} \alpha - p_{2n} &= (1 + \sqrt{2}) \frac{1}{2\sqrt{2}} \left((1 + \sqrt{2})^{2n+1} - (1 - \sqrt{2})^{2n+1} \right) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \left((1 + \sqrt{2})^{2n+2} - (1 - \sqrt{2})^{2n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[(1 - \sqrt{2})^{2n+2} - (1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})^{2n+1} \right] = -(1 - \sqrt{2})^{2n+1} = (\sqrt{2} - 1)^{2n+1} \end{aligned}$$

dont on déduit

$$u_n = q_{2n} (\sqrt{2} - 1)^{2n+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left((1 + \sqrt{2})^{2n+1} + (\sqrt{2} - 1)^{2n+1} \right) (\sqrt{2} - 1)^{2n+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(1 + (\sqrt{2} - 1)^{4n+2} \right)$$

Par suite $u_n = f(q_{2n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\sqrt{2}}$ en décroissant. On a donc a fortiori $\inf_{n \in \mathbb{N}} f(n) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

- On étudie de même $(v_n) = (f(q_{2n-1}))$. Des calculs analogues conduisent à

$$-1 < \frac{-1}{q_{2n}} < q_{2n-1}\alpha - p_{2n-1} < 0$$

dont on déduit successivement $f(q_{2n-1}) = q_{2n-1}(q_{2n-1}\alpha - p_{2n-1} + 1)$ puis

$$\begin{aligned} f(q_{2n-1}) &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left((1+\sqrt{2})^{2n} - (\sqrt{2}-1)^{2n} \right) - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(\sqrt{2}-1)^{4n} \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left((1+2n\sqrt{2}) - 1 \right) - \frac{1}{4} \\ &\geq n - \frac{1}{4} \geq \frac{3}{4} > \frac{1}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

- Soit alors pour $q \in N^*$ fixé quelconque, $f(q) = q(q\alpha - p)$ avec $p = E(q\alpha)$.
 - Pour $\frac{p}{q} \in \left\{ \frac{p_n}{q_n}, n \in N^* \right\}$ on a déjà $f(q) > \frac{1}{2\sqrt{2}}$.
 - Sinon il existe un unique entier n tel que $q \in]q_n, q_{n+1}[$ (car la suite (q_n) est croissante de limite $+\infty$). On a alors

$$|r - r_n| = \left| \frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{|pq_n - qp_n|}{qq_n} \geq \frac{1}{qq_n} > \frac{1}{q_n q_{n+1}} = |r_{n+1} - r_n|$$

Donc $r \notin](r_n, r_{n+1})[$. Par ailleurs on a

$$|r - r_{n+1}| = \left| \frac{p}{q} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| = \frac{|pq_{n+1} - qp_{n+1}|}{qq_{n+1}} \geq \frac{1}{qq_{n+1}} > \frac{1}{q^2_{n+1}}.$$

Comme $\alpha \in](r_n, r_{n+1})[$, on en déduit, que

- ✓ Ou bien r est du côté de r_n auquel cas $|r - \alpha| \geq |r - r_n| \geq \frac{1}{q_n q_{n+1}} > \frac{1}{q_{n+1}^2}$
- ✓ Ou bien r est du côté de r_{n+1} auquel cas $|r - \alpha| \geq |r - r_{n+1}| \geq \frac{1}{q_{n+1}^2}$.

Finalement dans tous les cas on a $|r - \alpha| \geq \frac{1}{q_{n+1}^2}$. Mais alors

$$f(q) = q^2(\alpha - r) = q^2|\alpha - r| \geq q^2 \frac{1}{q_{n+1}^2} > \frac{q_n^2}{q_{n+1}^2} = \frac{1}{r_n^2} \geq \frac{1}{r_1^2} = \frac{4}{9} > \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

- En résumé pour tout entier q on a montré $f(q) > \frac{1}{2\sqrt{2}}$ et donc $\inf_{q \in N^*} f(q) \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}$.
- Comme on disposait déjà de l'autre inégalité il vient

$$\boxed{\inf_{q \in N^*} f(q) = \frac{1}{2\sqrt{2}}}$$